FONDO PROVINCIA

92 H 17

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine 30109

12219

NAZIONALE
B. Prov.
I
1175
VITT. EM. III
NAPOLI

B. F.
I
1175

07362

DI

Die Grundlehren

der

neuern Geometrie.

Erſter Theil:

Die Theorie des anharmoniſchen Verhältniſſes, der homographiſchen Theilung und der Involution, und deren Anwendung auf die geradlinigen und Kreis-Figuren.

Nach

Chasles: Traité de Géométrie Supérieure

frei bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuſe.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

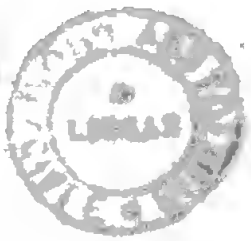
BIBLIOTECA NAPOLI

Mit in den Text gedruckten Holzſchnitten.

Braunſchweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1856.



DI
NAPOLI

Vorrede.

So reichhaltig die deutsche Literatur an guten Lehrbüchern der alten euklidischen Elementargeometrie ist, so arm ist sie an gediegenen Werken über neuere Geometrie — ein vollständiges System der letztern existirt bis jetzt noch gar nicht. — Ich habe es deshalb für kein unnützes Unternehmen gehalten: das Wichtigste aus dem 1852 erschienenen klassischen Traité de Géométrie Supérieure von Chasles, dessen ausgezeichnete Leistungen in diesem Zweige der Mathematik auch bei uns allgemein anerkannt sind, in freier deutscher Bearbeitung herauszugeben. „Denn es ist nicht unwahrscheinlich, daß durch gehörige Verschmelzung von Resultaten und Ideen des Einen mit Methoden des Andern noch mehr als eine neue Entdeckung sich machen lassen werde" — bemerkt Steiner, unsere erste Auctorität auf dem Gebiete der neuern Geometrie, mit Recht. —

Die Haupttendenz des Verfassers ist: den Methoden der neuern Geometrie die Allgemeinheit und Leichtigkeit der analytischen Methode zu geben, so daß man weder die verschiedene gegenseitige Lage der einzelnen Theile einer Figur, noch die Bedingungen ihrer Realität, oder Imaginärität bei der allgemeinen Untersuchung oder Construction derselben fortwährend ins Auge zu fassen braucht. —

Zu dem Zwecke hat der Verfaſſer zur Unterſcheidung der verſchiedenen Richtung der Segmente oder Winkel die entſprechenden Vorzeichen +, — auf eine durchgreifende und ſyſtematiſche Weiſe eingeführt, was bisher in der neuern Geometrie gewöhnlich nicht geſchehen iſt. —

Auch das Imaginäre wird wie in der analytiſchen Geometrie behandelt, indem es ſich als die Wurzeln von Gleichungen des zweiten Grades darſtellt, wovon blos die Coefficienten und nicht die Wurzeln ſelbſt in den betrachteten Relationen vorkommen. Die imaginären Punkte und Linien kommen dabei nicht ſelbſt explicite in Betracht, ſondern werden durch ſtets reelle Elemente erſetzt, ſo daß die Beweiſe auch die Fälle umfaſſen, wo gewiſſe Punkte, oder Linien einer Figur imaginär werden. — Bei dieſer Behandlungsweiſe des Verfaſſers bleibt jedoch noch eine Hauptfrage, nämlich die nach der Lage der imaginären Punkte und Linien, ganz unentſchieden — und wir haben geglaubt, dieſe weſentliche Lücke jedesmal nach der Gauß'ſchen Theorie des Imaginären ausfüllen zu müſſen, weil man über die Lage von imaginären Punkten und Linien auch in den beſten Werken über analytiſche, oder neuere Geometrie entweder gar keine, oder größtentheils ganz irrige Angaben findet. —

Das Fundament der Methoden des Verfaſſers iſt der Begriff des anharmoniſchen Verhältniſſes (§. 6), woraus als weitere Entwickelungen die Theorie der homographiſchen Theilungen und der homographiſchen Strahlenbüſchel (§. 63) und die Theorie der Involution (§. 116) erſcheinen, welche Theorien hier mit einer Gründlichkeit und Ausführlichkeit bearbeitet ſind, wie man ſie wohl in keinem andern Werke über neuere Geometrie

finden dürfte. — Dieſe allgemeinen Thorien bilden die erſte Abtheilung des vorliegenden erſten Theiles des Werkes — und in der zweiten Abtheilung werden dieſelben als Beweismittel der wichtigſten Eigenſchaften der geradlinigen und der Kreis-Figuren angewandt. — Man findet hier die wichtigſten und nützlichſten Sätze über das Dreieck, Viereck, Sechseck und Vieleck überhaupt; ferner eine allgemeine Methode zu einer gleichmäßigen Conſtruction einer großen Anzahl verſchiedener Aufgaben, worunter ſich auch die des Apollonius vom Verhältnißſchnitt, Raumſchnitt und beſtimmten Schnitt befinden — und ebenſo eine hinreichende Anzahl von wichtigen und intereſſanten Sätzen über Kreisfiguren, wovon ein Theil in der Theorie der Kegelſchnitte, die in einem beſondern zweiten Theile ausführlich abgehandelt werden ſoll, wieder vorkommen wird, und welche zeigen: daß die bei geradlinigen Figuren mit ſo vieler Leichtigkeit angewandten Beweismethoden auch bei den Kreiſen und Kegelſchnitten mit keinem geringern Erfolge anwendbar ſind. —

Auch eine allgemeine Theorie der Verwandtſchaften oder Transformationen der Figuren (Collineation oder Homographie, ꝛc.) entwickelt der Verfaſſer, wobei beſonders die metriſchen Relationen beſtimmter hervortreten. — Jedoch hat der Verfaſſer auf dieſe Methoden bei den Beweiſen der verſchiedenen Sätze ſo viel als möglich verzichtet — und mittelſt ſeiner vorhin erwähnten Fundamentaltheorien einfache direkte Beweiſe zu geben geſucht, weil es nach ſeiner Anſicht nicht genügt: blos zu wiſſen, daß ein Satz wahr iſt, ſondern daß man auch ſeinen Zuſammenhang mit den übrigen, zu demſelben Gegenſtande gehörigen Sätzen kennen muß. — Hierin beſteht gerade das Eigenthümliche dieſer Behand-

lung der neuern Geometrie', wodurch ſie der Methode der euklidiſchen Geometrie wieder mehr genähert — und der Uebergang von dieſer zu jener nicht ſo ſchroff wird. —

Schließlich iſt noch zu bemerken: daß in der vorliegenden deutſchen Bearbeitung Alles hinweggelaſſen iſt, was nicht in ein ſyſtematiſches Lehrbuch der neuern Geometrie gehört — oder nicht an ſeinem Orte war, und erſt ſpäter, im zweiten Theile, eine paſſendere Stelle finden wird. — Sogar manche Sätze von weniger Intereſſe und Bedeutung für das Ganze ſind hinweggefallen, um eine allgemeinere Verbreitung der deutſchen Ausgabe nicht durch einen zu hohen Preis zu verhindern. —

Nachſchrift.

Herrn Prof. Joh. Aug. Grunert ſcheinen meinen Recenſionen mathematiſcher Werke in den göttingeſchen gelehrten Anzeigen und in den heidelberger Jahrbücher der Literatur ein ſtachelnder Dorn im Auge zu ſein — wahrſcheinlich aus dem Grunde, weil ſie mit den ſeinigen nicht übereinſtimmen — und er hat ſich deshalb bewogen gefühlt: in Theil 25, liter. Bericht XCVII ſeines Sammelſuriums „Archiv für Mathematik und Phyſik" betittelt, in einer ſo abgeſchmackten und einfältigen Weiſe über mich zu räſonniren, daß ich es unter meiner Würde halten würde, auch nur ein Wort auf ſolches ächt Grunert'ſches Gewäſch, wie es ſchon ſeit Jahren in dem „Archiv" zu finden iſt, zu erwidern, wenn die Anmaßung und die ſchmutzige Tendenz der Manipulation des Hrn. Grunert eine nicht zu empörende wäre, und ich nicht die Anwendung des Sprichwortes: „qui tacet censentit" auf mich befürchten müßte. —

Hr. Grunert wundert ſich nämlich ſehr: daß die göttingeſchen gelehrt. Anzeigen — die er ſelbſt eine „ſo berühmte Zeitſchrift" nennt — ihre Seiten immer noch mit meinen mathematiſchen Recenſionen, denen der weltberühmte Mann dieſer geiſtreiche, ſcharfſinnige und unparteiiſche „Herausgeber" einer mathematiſchen Zeitſchrift, dem ſelbſt Gauß'ſche Begründungen nicht genügen — den Namen „Machwerke" beizulegen die Gefälligkeit hat, anfüllen — wogegen es ihn im Innerſten der Seele freut (!), daß die „ausgezeichneten heidelberger Jahr-

bücher der Literatur", dieſe „hochachtbare Zeitſchrift" — mich aus der Reihe ihrer Mitarbeiter geſtrichen zu haben ſcheine, (Grunert'ſche Logik und Wahrheit! —), weil Hr. Grunert, wie er ſagt, ſchon lange nicht mehr, wie früher öfters zu ſeiner Ergözung (? ich glaube nicht, daß Hr. Grunert Urſache hat, ſich über meine Kritik ſeines „Lehrbuches der Mathematik und Phyſik für Kameraliſten" in den heid. Jahrb. d. Lit. zu ergözen — ſo wenig ſich die Herren Kameraliſten an dem voluminöſen Opus ergözen werden! —) mir zu begegnen, das Vorgnügen gehabt habe" (wie trivial!), und Hr. Grunert kann ſich nicht enthalten, wörtlich hinzuzufügen: „Wir hoffen und wünſchen uns nicht zu täuſchen, wenn wir die Meinung hegen, daß dieſem hochachtbaren Journale die göttinger gelehrten Anzeigen — in ihrem eigenen Intereſſe — hierin bald nachfolgen werden! —"

Doch, Hr. Grunert, Sie haben ſich ſehr getäuſcht — und wenn Sie nicht ganz verblendet und in fixen Ideen befangen wären, ſo hätten Sie dies leicht a priori wiſſen können. — Denn wie konnten Sie Hr. Grunert ſich nur einbilden, oder anmaßen, daß man in Göttingen, wo ein Gauß lebte, unter deſſen Aufſicht die mathematiſchen Recenſionen in den götting. gelehrten Anzeigen geſtanden — Ihres mathematiſchen Rathes bedürfe — und ihrem Wunſche ſo ohne alle Motivirung, auf bloßes nichtsſagendes Gerede hin — entſprochen werde? — Oder halten Sie ſich etwa für eine mathematiſche Autorität, auf die man in Göttingen unbedingt etwas geben müſſe? — Das wäre eine noch lächerlichere Anmaßung und Täuſchung. — Hr. Grunert, Sie ſollten nur geſehen haben, was Gauß für ein lächelndes Geſicht machte, als er Ihre koſtbaren Ergänzungen zu Klügels math. Wörterbuche durchſah — und namentlich in dem Artikel „Wahrſcheinlichkeitsrechnung" Ihre ſchönen Motive las, womit Sie der neuſten und vollendetſten Gauß'ſchen Expoſition der Methode der kleinſten Quadrate aus dem Wege gehen! — Und wahrlich der Appetit würde Ihnen gewiß vergangen ſein, Ihr verleumderiſches Pamphlet nach Göttingen zu ſenden! —

Aber Hr. Grunert ſcheint ſehr oft nicht zu wiſſen, was er thut und redet. — Er will den Redaktionen der beiden genannten Zeitſchriften Complimente machen, um ſeinen ſaubern Zweck zu erreichen — und ſagt denſelben doch eigentlich Grobheiten! — Denn würde es Hr. Grunert für eine Schmeichelei halten, wenn man ihm ſagte: Sie ſind ein hochberühmter Mathematiker; aber in Ihrer Zeitſchrift laſſen Sie ſchon 10 Jahre hindurch nur nichtsnutzige Machwerke von Ignoranten abdrucken! — Man muß meine Kritiken in den götting. gel. Anz. und in den heidelb. Jahrb. der Litr. mit denen des Hrn. Grunert in ſeinen litr. Berichten des Archivs vergleichen, um ſofort zu ſehen, welche den Namen „Machwerke" verdienen! — Welcher „unnütze

Plunder" (ein Grunert'scher klassischer Ausdruck!) in dem bereits zu 25 Bänden angeschwollenen „Sammelsurium" vergraben liegt — und wovon kein geringer Theil der industriellen Hand des „Herausgebers" selbst verdankt wird — werde ich an einem andern Orte ausführlich nachweisen — und es wird sich ergeben: inwiefern Hr. Grunert bei der Redaktion seiner Zeitschrift mit „Kritik" verfährt — so wie: daß seine Recensionen in den litr. Berichten — und seine kritisirenden Urtheile in dem Archiv überhaupt — nichts als sinnloses, stereotypes, oberflächliches Gerede ist. — Die Kunst versteht er auf jeden Fall meisterhaft: viele Bogen mit „unnützem Formeiplunder" zu füllen und seinen Abonnenten jährlich zwei Bände für 6 Thlr. aufzuhängen! — Das ist es, was Hr. Grunert vorzugsweise „anstrebt". — Man beschaue nur seine Aufsätze über Sternschnuppen = 35 Seiten — über Ungleichheiten, Mittelgrößen, ꝛc. = 50 Seiten — über Elimination = 62 Seiten — über Aberration = 60 Seiten — über imaginäre Größen = 54 Seiten — ꝛc. ꝛc. — und man wird sich leicht überzeugen, was Hr. Grunert besonders „anstrebt." —

Hr. Grunert spricht an dem angeführten Orte auch vom „Uebersetzungshandwerk" und vom „Tragikomischen". — In Bezug auf Ersteres will ich nur bemerken: daß ich schon bei einer oberflächlichen Durchsicht des Archivs gegen 20 Uebersetzungen von ihm selbst zähle, und daß die wichtigsten Artikel in den Grunert'schen Ergänzungen des Klügel'schen Wörterbuches nichts als Auszüge und freie Uebersetzungen aus den Werken von Gauß, Laplace, Legendre, Cauchy, ꝛc. sind! — Was das Zweite betrifft, so sieht jeder Unbefangene, daß die Rolle, welche Hr. Grunert als Redacteur des Archivs, als Kritiker in seinen litter. Berichten — und besonders mit seinen captationes benevolentiae und Unwahrheiten bei den Redactionen der götting. gel. Anzeigen und der Heid. Jahrb. d. Litr. gespielt hat, mit vollem Rechte eine „tragikomische" genannt werden kann. — Schon die Sprache des Hrn. Grunert ist eine „tragikomische" — namentlich in den gründlichen und treffenden Kritiken der litr. Berichte. — Sapienti sat! —

Doch nein, ich muß mit Herrn Grunert schon hier noch einige Worte über die „höhere Analysis" reden; denn die Unverschämtheit oder Unwissenheit, welche in den Worten: „denn wo so ganz und gar keine Kenntniß und Verständniß dessen, was die neuere Analysis anstrebt, und wodurch sie sich in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge auszeichnet, sich findet, wie bei diesen Recensenten, ꝛc. ꝛc." des tiefsinnigen Mathematikers sich kundgibt, ist zu groß, als daß ich länger schweigen könnte. —

Ich will zunächst meine Auffassung der Principien der höheren Analysis, wie ich sie in den göttingischen geehrt. Anz. von 1847–1855 bei

Gelegenheit der Beurtheilung der Werke von Jolly, Ohm, Navier, Dirksen, Snell, Franke, Külp, Schlömilch, Price und Drobisch — so wie in meinen „Grundlehren der höheren Analysis" unumwunden und entschieden mit der gehörigen Ausführlichkeit ausgesprochen und entwickelt habe, hier kurz wiederholen, damit man sie mit der des Hrn. Grunert vergleichen kann. —

1) Stetige Größen (Längen, Flächen, &c.) ändern sich nach Incrementen, die weder absolute Nullen, noch bestimmte endliche, wenn auch noch so kleine Größen sind, weil im ersten Falle keine, und im zweiten Falle eine sprungweise (discrete) Aenderung stattfände. — Es müssen also diese Incremente als unendlich, unbestimmt oder unbeschränkt klein gedacht werden, so daß sie unter jede gegebene oder angebbare, bestimmte Grenze der Kleinheit herabsinkend gedacht werden müssen, wenn eine stetige Aenderung (Zu- oder Abnahme) stattfinden soll. — Die Anzahl m der in jeder endlichen, noch so kleinen Größe a enthaltenen unendlich kleinen Theile (Incremente) muß daher größer als jede angebbare, bestimmte, noch so große Zahl — d. h. unendlich, unbeschränkt, über jede bestimmte Grenze hinauswachsend gedacht werden, wie sofort aus der Gleichheit $a = m \cdot \frac{a}{m}$ erhellet. — Ohne diese Begriffe des unbeschränkt Kleinen und unbeschränkt Großen sind wir nicht im Stande eine stetige Aenderung zu denken! —

2) Aus dem Begriffe einer unendlich oder unbeschränkt großen Zahl oder Größe m folgt unmittelbar: daß ihr Zustand des unbeschränkten Wachsens durch Addition, oder Subtraction einer beliebigen endlichen Größe a nicht geändert wird, so daß man immer $m \pm a = m$ setzen darf; denn es würde nach dem Begriffe vom m nicht blos zwecklos, sondern sogar ganz sinnlos sein: das $\pm a$ neben dem m beibehalten zu wollen! —

3) Hiernach ist ferner, wenn A eine beliebige endliche Größe bedeutet: $A \pm \frac{a}{m} = \frac{mA \pm a}{m} = \frac{mA}{m} = A$, weil mA offenbar unendlich groß ist. — Eine unendlich kleine Größe darf also neben einer endlichen, womit sie blos durch Addition, oder Subtraction verbunden ist, ebenso, und aus demselben Grunde, hinwegfallen, wie eine endliche Größe gegen eine unendlich große. — Die Gleichheit $A \pm \frac{a}{m} = A$ läßt sich auch, wie schon Leibniz bemerkt hat, indirect (apagogisch) rechtfertigen; denn wollte man $A \pm \frac{a}{m} = A \pm \alpha$ setzen, wo α eine bestimmte, also endliche, wenn auch noch so kleine

Größe bedeutet; so würde diese Annahme der Voraussetzung widersprechen: daß m unendlich groß, also $\frac{a}{m}$ unendlich klein gedacht werden soll! — Hierbei hat man aber den richtigen Begriff des unendlich Kleinen und unendlich Großen wohl im Auge zu behalten — und sich namentlich vor dem groben Irrthume zu hüten: sich unter dem unendlich Kleinen und Großen etwas Angebbares, Bestimmtes, Fixes, Vollendetes zu denken. — Beide Begriffe involviren weiter nichts, als die „Negation" jeder Grenze des Ab- oder Zunehmens — der Kleinheit oder Großheit — einer Zahl oder Größe, wie es die begriffliche Auffassung — nicht bloße Anschauung — des Verlaufes (Zu- oder Abnehmens) stetiger Größen mit absoluter Nothwendigkeit fordert. —

Hieraus ergibt sich dann das Verhalten der unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen oder Größen der verschiedenen Ordnungen (Höhere Analysis S. 2 folgg.) — und alle diese Sätze zusammengenommen bilden die einzig naturgemäße und nicht zu umgehende Grundlage der gesammten höheren Analysis. —

4) Wenn nun $y = f(x)$ eine stetige Function von x ist, und es ändert sich x um die unendlich kleine Größe dx von der ersten Ordnung, so ändert sich $y = f(x)$ auch um eine unendlich kleine Größe $dy = f(x+dx) - f(x)$ erster Ordnung — weil $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wird, und die Summe der unendlich vielen unendlich kleinen Werthe von dy, welche man erhält, wenn sich x von dem endlichen Werthe a bis zu dem ebenfalls endlichen Werthe b stetig, d. h. nach unendlich kleinen Incrementen dx, ändert, der endlichen Größe $f(b) - f(a)$ gleich ist. — Das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ muß also im Allgemeinen einen bestimmten Werth haben — und zwar einen constanten Werth a, wenn $y = f(x) = ax + b$ ist — und einen mit x veränderlichen Werth, wenn y eine andere Function von x ist, so daß man $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ setzen kann. — Dieses Verhältniß $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ oder $dy = f'(x)\,dx$ drückt das „allgemeine Gesetz der stetigen Aenderung" der Function $y = f(x)$ aus, wodurch die Auflösung einer Menge wichtiger Probleme gegeben — und sogar der Werth der Function $y = f(x)$ für jeden Werth von x bestimmt wird (natürlich innerhalb der Grenzen der Stetigkeit von $f(x)$), wenn ihr Werth $f(a)$ für irgend einen Werth $x = a$ gegeben ist; denn es ist alsdann bekanntlich:

$$f(x) = \int_a^x f'(x)\,dx + f(a).$$

Hierin liegt der Nerv der ganzen höhern Analysis — weil sich die zwischen den unendlich kleinen gleichzeitigen Incrementen stattfindenden Relationen leichter auffinden lassen, als die zwischen den endlichen Größen selbst. —

Um aus $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ den Ausdruck für $f'(x)$ zu erhalten, muß man unendlich kleine Größen gegen endliche hinweglassen, wodurch aber, wie bereits gezeigt, kein angebbarer, bestimmter, noch so kleiner Fehler — also überhaupt kein Fehler — entstehen kann. — Ist z. B. $y = x^3$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}$ $= 3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2$, und folglich in aller Strenge: $\frac{dy}{dx} = 3^2$, oder $dy = 3\,x^2\,dx$; denn es kann kein bestimmter, noch so kleiner Fehler in dieser Gleichheit nachgewiesen werden, welcher von der Hinweglassung der unendlich kleinen Glieder $3x\,dx + dx^2$ herrührte! — Damit ist aber nicht gesagt; daß die Resultate der Differentialrechnung immer absolut genau sind — oder daß das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ für jeden Werth von x mit völliger Genauigkeit angegeben werden kann. — Im Gegentheil, man wird sich in den meisten Fällen mit einer unbeschränkten Annäherung begnügen müssen — und dasselbe gilt von $y = \int f'(x)\,dx$. —

Bei vielen Untersuchungen ist es nothwendig, auch die höheren Differentialverhältnisse $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... zu bestimmen, wozu aber keine neuen Betrachtungen erforderlich sind; denn $\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x)$ wird ebenso aus $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ gebildet, wie dieses aus $y = f(x)$; ꝛc.

In dem Vorhergehenden ist das Wesen und die Methode der höhern Analysis im Allgemeinen vollständig und unumwunden ausgesprechen — und ich habe a. a. O. gezeigt: daß jede andere Methode auf diese s. g. Leibniz'sche Infinitesimalmethode zurückkommen muß, wenn sie nicht sinn- und begrifflos sein soll. — Denn unter allen Umständen ist der Gedanke festzuhalten: „daß das allgemeine Gesetz der stetigen Aenderung einer Function $y = f(x)$ nur durch das Verhältniß $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ oder $dy = f'(x)\,dx$ der gleichzeitigen unendlich kleinen Aenderungen dy, dx von y und x ausgedrückt werden kann" — eben weil die Aenderung stetiger Größen

nach Incrementen erfolgt, die weder absolute Nullen, noch angebbare endliche Größen sind. — Alsdann kann man aber, wie man sich auch anstellen, welche Wege man auch einschlagen, welche Mittel man auch anwenden möge — den Uebergang von $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ zu $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ oder $dy = f'(x)\,dx$ nicht anders bewerkstelligen, als dadurch: daß man unendlich kleine Größen gegen endliche ꝛc. hinwegläßt. —

Wenn x imaginär also von der Form $p + q\sqrt{+1}$ ist; so müssen nach der allein objectiv richtigen Gauß'schen Theorie des Imaginären p, q als zwei independente Veränderliche behandelt werden — und alsdann ergibt sich auf der Stelle: daß die Grundformeln der Differentialrechnung dieselbe Form behalten, wie wenn x reell ist! —

Hören wir nun auch Hrn. Grunert! — In Klügels math. Wörterbuche, Bd. 5, Artikel „Unendlich" (die Lehrbücher der höhern Analysis des Hrn. Grunert besitze ich nicht, und konnte sie hier auch nicht bei Bekannten auftreiben —) sagt derselbe wörtlich: „Das Symbol der „Gränze einer unbegränzten Zunahme" (?) ist ∞, welches sowenig wie 0 (das Symbol der Gränze einer unbegränzten Abnahme) etwas Reelles bezeichnet. Die Zeichen 0 und ∞ scheinen (!) uns völlig in eine Kategorie zu gehören; so wenig jenes Schwierigkeiten macht (!), ebensowenig wird dieses Hinderniſſe in den Weg legen (!). — Eine solche Größe läßt sich gewissermaßen nur fingiren, wenn ich so sagen darf, welches aber auch mit der Null der Fall ist, und ∞ bedeutet also das actuale Unendliche der Metaphysiker! — So lange man sich eine Größe als eine Zahl denkt, ist es, wie es scheint, keinem Zweifel unterworfen, daß diese Größe weder beim Abnehmen 0, noch beim Zunehmen ∞ wirklich erreichen, sondern diesen beiden Gränzen sich nur immer mehr nähern kann (?!). — Bei stetigen Größen aber ist dies anders" — und es soll z. B. *tang* 90° „als stetige Größe unbegränzt, ohne Ende, im eigentlichen Sinne unendlich, vollgroß, nach Busse, gedacht werden müssen. —"

Hier haben wir wieder einen Beweis: daß Hr. Grunert seine eigenen Worte nicht versteht — und im wahren Sinne des Wortes eine „tragikomische" Sprache redet — so wie eine „tragikomische" Rolle spielt! — Das ist die neuere strenge Richtung — die wahre mathematische Strenge? — Wahrlich Hr. Grunert hat Recht — die habe ich allerdings bis jetzt nicht gekannt! — Hierauf theilt Hr Grunert die Cauchy'schen Sätze über das unendlich Kleine mit — weil daſſelbe von ganz besonderer Wichtigkeit ist — wie er sagt, und geht dann zur Differentialrechnung über, wo es heißt: „Die

Gränze von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ heißt der Differentialquotient von y und wird durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, welches hier aber nicht als ein getrenntes, sondern als ein einfaches Zeichen zu betrachten ist! — Die Gränze, welcher sich der Bruch:

$$\frac{f(x+\alpha\triangle x)+f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}\ \triangle x$$

nähert, wenn α sich der 0 unbegränzt nähert, heißt das Differential von $y=f(x)$ (?) und wird mit dy bezeichnet. Nimmt man nun auf beiden Seiten obiger Gleichung die Gränzen, so erhält man augenblicklich:

$$dy = df(x) = f(x)\triangle x = \frac{dy}{dx}\ \triangle x, \qquad (?!)$$

oder wenn man $\triangle x = dx$ (?) setzt, immer aber wohl bemerkt, daß dx eine endliche bestimmte (?!) Größe, und $\frac{dy}{dx}$ ein einfaches (?!) Zeichen ist, welches nicht getrennt (?!) werden darf:

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\ dx.“$$

In den geistreichen, kritischen Supplementen zu Klügel's math. Wörterbuche, Artikel: Differentialrechnung heißt es: „Unter dem Differential einer Function $y=f(x)$ versteht man nämlich nichts anders, als das Product ihrer derivirten Function $y'=f'(x)$ in das Increment oder die Differenz $\triangle x$ der unabhängigen veränderlichen Größe x (??), so daß also, wenn wir, wie gewöhnlich, das Differential von $y=f(x)$ durch $dy=df(x)$ bezeichnen, überhaupt

$$dy = y'\triangle x \text{ oder } dy = f'(x)\triangle x \qquad (?!)$$

ist. Für $y=x$ ist $y'=1$; also $dx=\triangle x$. — Daher setzt man gewöhnlich:

$$dy = y'\,dx \text{ oder } df(x) = f'(x)\,dx,$$

und nennt auch dx das Differential der unabhängigen Veränderlichen Größe x, wobei man aber zu bemerken hat, daß dx immer eine constante Größe ist. —“

Also das ist die tiefe, genaue Kenntniß — die wahrhaft strenge mathematische Begründung der neuern Analysis des Hrn. Grunert? — Mit einem Manne, der solches, in jeder Hinsicht obsurdes, grund- und bodenloses Räsonnement für „Begründung“ der höheren Analysis

hält und ausgibt — sollte man eigentlich kein einziges Wort wechseln — und wenn ich es dennoch hier nicht unterlasse; so geschieht dies nur, um zu zeigen, was für eine „tragikomische" Sprache und Rolle Hr. Grunert in seinen Schriften so oft redet und spielt, wenn es sich um etwas anderes, als mechanische Formelmacherei handelt — wie oft er sich den Verstand — Begriff — durch seine Formeln benebeln läßt! — Also auch bei constanten, endlichen Incrementen der Independenten x findet eine stetige Aenderung der Function $y = f(x)$ statt — und das unvollständige Verhältniß solcher endlicher gleichzeitiger Incremente soll das Gesetz der stetigen Aenderung der Function $y = f(x)$ ausdrücken? — Man soll zur Grenze übergehen — und doch sollen die Incremente endliche und constante Größen bleiben? — Hr. Grunert, wo war ihr Verstand, als Sie solchen Unsinn niederschrieben? — Doch es begegnet Ihnen leider nur zu oft: daß Sie nicht wissen, was Sie thun — Ihre eigenen Worte nicht verstehen. — Sie sprechen vom „Grenzübergange" — ohne auch nur mit einem Worte zu sagen: welchen Zweck derselben hat — worin er besteht, und weshalb er erlaubt ist — und solch oberflächliches, rapides „Machwerk" nennen sie eine „wahrhaft strenge Begründung" der höheren Analysis? — und darauf bilden Sie sich so viel ein, daß man selbst in Göttingen Ihrer Autorität sich fügen müsse? —

Sie sagen $\frac{dy}{dx}$ sei ein einfaches Zeichen, welches nicht getrennt werden dürfe, welche Ungereimtheit Sie den alten Lhuilier nachsprechen — Sie selbst aber schreiben ja unzählige Male: $dy = f(x)\,dx$ statt $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, $d.x^n = n\,x^{n-1}\,dx$, u. s. f. und mit Recht. — Denn wenn dies nicht zulässig wäre, so dürften Sie auch nicht $y = \int f'(x)\,dx$ setzen — und ist denn in dieser letzten Gleichung das dx auch eine endliche Constante? —

Wenn in $y = f(x)$ die Independente x imaginär, $= u + v\sqrt{-1}$ wird, so meint Hr. Grunert u und v seien Functionen von x! — und müht sich entsetzlich ab: die Gültigkeit der Grundformeln der Differentialrechnung auch für diesen Fall zu beweisen, indem er $u + v\sqrt{-1}$ auf die Form $\varrho\,(\cos\varphi + \sin\varphi\,.\sqrt{-1})$ bringt. —

Man hat vielmehr u und v als zwei independente Veränderliche zu betrachten und zu behandeln — und alsdann ergibt sich alles unmittelbar mit der größten Einfachheit und Leichtigkeit. — Hier bestimmt Hr. Grunert übrigens nicht die Differentialquotienten, wie früher, sondern die Differentiale — und man sieht leicht ein, weshalb! — Es würde zu weit führen, wenn ich hier alle den sinnlosen „Formelplun-

der" und die „tragikomische" Logik erörtern wollte, welche Hr. Grunert noch mittheilt — namentlich in Bezug auf die Differentiation der Functionen mit mehreren Independenten. — Unter andern findet man hier auch die sinnreichen Formeln:

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2f(x)}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{1.2.3} + \cdots$$

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, u+du, \ldots)$$
$$= V + \frac{dV}{1} + \frac{d^2V}{1.2} + \frac{d^3V}{1.2.3} + \cdots,$$

wo $V = f(x, y, z, u, \ldots)$ ist! —

Das Vorhergehende wird einstweilen genügen, um beurtheilen zu können: wer von uns beiden, ich, oder Hr. Grunert, so ganz und gar keine Kenntniß von einer strengen Behandlung der höhern Analysis hat! —

Ich werde, wie schon bemerkt, das gesammte „mathematische Anstreben" des Hrn. Grunert — insbesondere wie es sich in den Archiv darstellt — in einer speciellen Schrift ausführlich beleuchten — was um so nothwendiger ist, als Hr. Grunert ein Organ in den Händen hat, wodurch er seine absurden Ansichten und Urtheile leicht im Publikum verbreiten kann — und dies war auch der Grund, weshalb ich in den götting. gel. Anzeigen einige Male mit ein paar Worten auf Hrn. Grunerts Urtheile in den litr. Berichten Bezug genommen habe, wodurch sich die eminente mathematische Notabilität arg verletzt gefühlt haben muß — wie seine niedrige Manipulation hinreichend zeigt! —

Heidelberg, im März 1856.

Dr. Schnuse.

Neuere Geometrie.

Erste Abtheilung.

Fundamentalsätze. — Theorie des anharmonischen Verhältnisses, der homographischen Theilung und der Involution. —

§. 1. Wenn die zwischen zwei Punkten a, b liegende Länge (Strecke) durch ab bezeichnet wird, so wird der Punkt a als Anfangspunkt derselben betrachtet, und wenn sie durch ba ausgedrückt wird; so heißt b der Anfangspunkt derselben. — Wenn man auf derselben Geraden mehrerer Segmente, Längen oder Strecken zu betrachten hat, so werden die von ihren Anfangspunkten aus nach einem gewissen Sinne gerichteten als positiv und die nach entgegengesetztem Sinne gerichteten als negativ betrachtet, so daß in den Rechnungen die ersten das Zeichen + und die letzten das Zeichen — bekommen. — Wenn also die durch ab bezeichnete Strecke positiv ist, so ist die durch ba dargestellte negativ, und folglich $ab = -ba$.

Fundamentalsatz.

§. 2. Wenn man auf derselben Geraden drei Punkte a, b, c betrachtet, so ist die algebraische Summe der zwischen ihnen liegenden drei Strecken ab, bc, ca immer $= 0$, in welcher Ordnung die drei Punkte auch auf einander folgen mögen; d. h. es ist, da die drei Punkte nur die drei verschiedenen Aufeinanderfolgen a, b, c; c, a, b; a, c, b darbieten können, weil der Punkt c rechts, oder links von dem Segmente ab, oder auf demselben liegen muß, stets:

$$ab + bc + ca = 0;$$

denn man kehrt in jedem dieser drei Fälle immer wieder zu dem Punkte a zurück, von welchem man ausgeht. —

Wenn die Lage eines Punktes a durch seine Entfernung von einem Anfangspunkte O bestimmt ist, und man will denselben auf einen andern Anfangspunkt O' beziehen, so hat man immer:

$$Oa = O'a - O'O;$$

denn diese Relation folgt wegen $O'a = -aO'$ aus:

$$Oa + aO' + O'O = 0,$$

welche bei jeder Aufeinanderfolge der drei Punkte O, O', a stattfindet.

Die Differenz $Oa - Ob$ zweier Segmente Oa, Ob, welche denselben Anfangspunkt haben, ist stets $= ba$, welche Größen und Richtungen die beiden Segmente auch haben mögen. —

Denn aus:

$$Oa - Ob = ba$$

folgt:

$$Oa + ab + bO = 0,$$

und diese letzte Gleichheit findet nach dem Obigen für jede Aufeinanderfolge der drei Punkte O, a, b statt; also auch die vorhergehende. —

Man kann auch sagen: daß die gegenseitige Entfernung zweier Punkte a, b als Funktion ihrer Abstände von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O durch die Relation:

$$ba = Oa - Ob$$

ausgedrückt wird.

Der obige Fundamentalsatz findet nicht blos für drei, sondern auch für eine beliebige Anzahl von Punkten a, b, c, d, ... f statt, und zwar für jede beliebige Aufeinanderfolge derselben, so daß stets ist:

$$ab + bc + cd + \ldots fa = 0.$$

Um den Satz in dieser Allgemeinheit zu beweisen, wollen wir zeigen: daß, wenn derselbe für n Punkte a, b, c, ... e stattfindet, er auch für $n+1$ Punkte gilt. — Gesetzt nun, der Satz gilt für die n Punkte a, b, c, ... e, so hat man die Relation:

$$ab + bc + \ldots + de + ea = 0,$$

und wenn man noch einen Punkt f mehr betrachtet; so hat man für die drei Punkte a, e, f die Relation:

$$ae + ef + fa = 0.$$

Addirt man nun diese beiden letzten Gleichheiten und bemerkt, daß die Glieder ea und ae sich gegenseitig aufheben; so hat man:

$$ab + bc + \ldots + de + ef + fa = 0.$$

Wenn alſo der Satz für n Punkte gilt, ſo gilt er auch für $n+1$ Punkte. Nun haben wir aber vorhin bewieſen, daß derſelbe für drei Punkte gilt; mithin gilt er auch für vier, fünf, ſechs,... Punkte. —*)

§. 3. Wenn a, a' zwei Punkte, α ihre Mitte und m ein beliebiger Punkt auf derſelben Geraden ſind; ſo hat man immer:

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2}, \quad ma \,.\, ma' = (m\alpha)^2 - (\alpha a)^2 .$$

Denn für die drei Punkte m, α, a hat man:

$$m\alpha + \alpha a + am = 0$$

oder:

$$ma = m\alpha + \alpha a,$$

und ebenſo zwiſchen den drei Punkten m, α, a':

$$ma' = m\alpha + \alpha a' .$$

Addirt mann die beiden letzten Gleichheiten, und bemerkt, daß $\alpha a = -\alpha a'$ iſt, weil α die Mitte zwiſchen a und a' iſt; ſo erhält man:

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2},$$

und wenn man ſie in einander multiplicirt und $-\alpha a$ für $\alpha a'$ ſetzt:

$$ma \,.\, ma' = (m\alpha)^2 - (\alpha a)^2 .$$

§. 4. Wenn aa', bb' zwei Strecken oder Segmente auf derſelben Geraden und α, β ihre Mitten ſind; ſo hat man immer:

$$\alpha\beta = \frac{ab + a'b'}{2} = \frac{ab' + a'b}{2} .$$

Denn wenn man auf derſelben Geraden einen beliebigen Punkt m nimmt, ſo hat man:

---

*) Dieſer Satz findet auch noch ſtatt, wenn die Punkte $a, b, c, \ldots f$ nicht mehr in derſelben Geraden liegen, ſondern die Ecken eines beliebigen Vieleckes bilden, und die Seiten deſſelben ſowohl nach Länge, als Richtung aufgefaſſt werden. —

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2}, \; m\beta = \frac{mb + mb'}{2},$$

folglich:

$$m\beta - m\alpha = \alpha\beta = \frac{mb + mb' - ma - ma'}{2}.$$

Nun ist aber:

$$mb - ma = ab, \; mb' - ma' = a'b',$$

also:

$$\alpha\beta = \frac{ab + a'b'}{2},$$

und wenn man b und b' unter einander vertauscht:

$$\alpha\beta = \frac{ab' + a'b}{2}.$$

§. 5. Positive und negative Winkel. — Den Winkel, welchen zwei Gerade A, B mit einander bilden, wollen wir mit (A, B) oder (B, A) bezeichnen, jenachdem derselbe von dem Schenkel A, oder von dem Schenkel B aus gezählt wird, so daß der Schenkel A, oder der Schenkel B der Anfang des Winkels ist. — Denkt man sich in dem Scheitel des Winkels das Auge eines Beobachters, dessen Blick nach dem als Anfang dienenden Schenkel gerichtet ist; so kann der Winkel erzeugt werden, indem sich der andere Schenkel von der Linken dieses Beobachters gegen die Rechte, oder von der Rechten gegen die Linke um den Scheitel drehet, und wenn die in dem ersten Drehungssinne erzeugten Winkel als positiv betrachtet werden, so müssen die in dem entgegengesetzten Sinne erzeugten als negativ angesehen werden. —

Anharmonisches Verhältniß.

§. 6. Wenn vier auf derselben Geraden liegende Punkte a, b, c, d zu je zwei betrachtet werden, so bestimmen sie sechs Segmente, und ein Verhältniß, wie:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

worin vier dieser sechs Segmente vorkommen, wird das anharmonische Verhältniß der vier Punkte genannt, und ist der Quotient aus dem Verhältnisse der Abstände eines der vier Punkte (a) von zwei andern (c, d) und dem Verhältnisse der Abstände des vierten Punktes (b) von letztern. —

Wenn vier in derselben Ebene liegende Gerade oder Strahlen A, B, C, D durch denselben Punkt gehen und ein sogenanntes Strahlenbüschel bilden, so wird ein Ausdruck wie:

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)},$$

worin die Sinus von vier der sechs Winkel vorkommen, welche diese Geraden oder Strahlen paarweise mit einander bilden, ein anharmonisches Verhältniß dieser Geraden oder Strahlen oder dieses Büschels genannt. —

Wenn endlich vier Ebenen $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}.\mathfrak{C}.\mathfrak{D}$ durch dieselbe Gerade gehen, so wird ein Ausdruck wie:

$$\frac{\sin(\mathfrak{A}.\mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{A}.\mathfrak{D})} : \frac{\sin(\mathfrak{B}.\mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{B}.\mathfrak{D})},$$

worin die Sinus von vier der sechs Winkel vorkommen, welche diese Ebenen paarweise mit einander bilden, ein anharmonisches Verhältniß dieser Ebenen genannt. —

§. 7. Vier Punkte a, b, c, d geben sechs anharmonische Verhältnisse; allein man braucht nur drei derselben zu betrachten, weil die drei übrigen die inversen oder reciproken Werthe der erstern sind. — Wir wollen die drei Verhältnisse:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}$$

nehmen, worin derselbe Punkt a successive mit den drei folgenden b, c, d verbunden oder conjugirt ist, so daß sich nur drei verschiedene Verhältnisse und ihre drei inversen oder reciproken:

$$\frac{ad}{ac} : \frac{bd}{bc}, \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}, \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}$$

bilden lassen. —

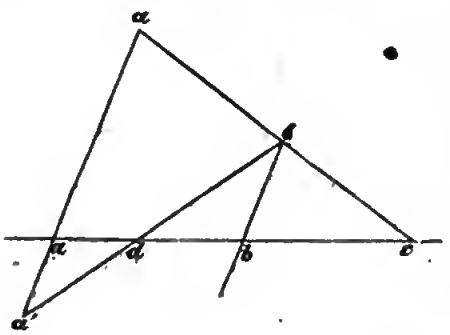
Wenn in Zukunft von drei anharmonischen Verhältnissen von vier Punkten die Rede ist, so sind immer die drei Verhältnisse gemeint, welche, wie oben, durch die successive Verbindung desselben Punktes mit den drei übrigen gebildet werden. —

§. 8. In welcher Ordnung die vier Punkte a, b, c, d auch auf einander folgen mögen, immer sind zwei ihrer drei anharmonischen Verhältnisse positiv, und das dritte ist negativ. —

Hiervon überzeugt man sich leicht. Wenn z. B. die vier Punkte in der Ordnung a, b, c, d auf einander folgen, so ist das erste anharmonische Verhältniß positiv, das zweite negativ und das dritte wieder positiv.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften zweier Systeme von vier Punkten, deren anharmonische Verhältnisse gleich sind, werden wir oft alle drei anharmonische Verhältnisse in Betracht ziehen müssen; allein gewöhnlich werden wir nur ein einziges derselben zu betrachten haben. —

§. 9. Aufgabe. — Wenn das anharmonische Verhältniß λ von vier Punkten und die Lage von drei derselben gegeben ist, die des vierten zu finden. —



Auflösung. — Es seien a, b, c, d die vier Punkte, deren anharmonisches Verhältniß:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \lambda$$

ist, wo λ eine positive, oder negative Größe bedeutet, und wovon b der Lage nach bestimmt werden soll, wenn a, c, d gegeben sind. — Durch den Punkt a ziehe man eine beliebige Gerade, auf welcher man zwei Segmente $a\alpha$, $a\alpha'$ so nimmt, daß $a\alpha : a\alpha' = \lambda$ ist, und zwar auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten von a, jenachdem λ positiv, oder negativ ist. Ferner ziehe man die beiden Geraden αe, $\alpha' d$ und durch den Durchschnittspunkt $\mathfrak{E}$ derselben eine Parallele zu $a\alpha$; so bestimmt diese Parallele den gesuchten Punkt b. — Denn die ähnlichen Dreiecke $\alpha ac, \mathfrak{E}bc$ geben:

$$\frac{ac}{be} = \frac{a\alpha}{b\mathfrak{E}},$$

und die Dreiecke $\alpha' ad, \mathfrak{E}bd$ geben:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a\alpha'}{b\mathfrak{E}},$$

Dividirt man diese beiden Gleichheiten in einander, so erhält man:

$$\frac{a\,c}{a\,d} : \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{a\alpha}{a\alpha'} = \lambda,$$

woraus erhellet, daß der so bestimmte Punkt b der gesuchte ist. —

Vermittelst dieser Construction kann man auch einen der beiden Punkte c, d bestimmen; denn soll z. B. der Punkt c bestimmt werden, so ziehe man durch den Punkt b die Parallele zu $a\alpha$, welche die Gerade $\alpha' d$ in einem Punkte β trifft, und die Gerade $a\beta$ gibt den Punkt c.

Wenn der Punkt a bestimmt werden soll, so schreibt man den Ausdruck des anharmonischen Verhältnisses so:

$$\frac{b\,d}{b\,c} : \frac{a\,d}{a\,c} = \lambda$$

und macht die Construction wie vorhin, indem man den Punkt b für a substituirt; d. h. man nimmt auf einer durch den Punkt b gezogenen Geraden zwei Segmente, welche in dem Verhältnisse $= \lambda$ stehen, ꝛc.

§. 10. Die vorhergehende Construction ist immer möglich, was für einen positiven, oder negativen Werth die Größe λ auch haben mag; es giebt aber drei besondere Fälle, in welchen der gesuchte Punkt mit einem der drei gegebenen Punkte zusammenfällt. — Es seien a, b, c die gegebenen Punkte und d der gesuchte Punkt.

1) Wenn $\lambda = 0$ ist, so ist $ac \,.\, bd = 0$, und der Punkt d fällt mit dem Punkte b zusammen. —

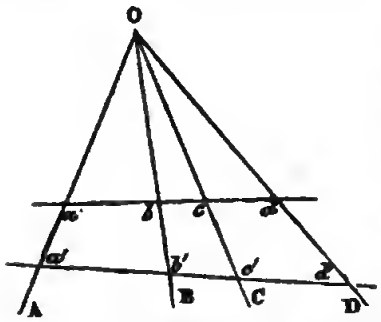
2) Wenn $\lambda = \infty$ ist, so ist $ad \,.\, bc = 0$, und der Punkt d fällt mit a zusammen. —

3) Wenn $\lambda = +1$ ist, so muß $\frac{d\,b}{d\,a} = \frac{c\,b}{c\,a}$ sein, also der Punkt d mit c zusammenfallen. —

Das anharmonische Verhältniß von vier verschiedenen Punkten kann also weder $= +1$, noch $= \infty$, noch $= 0$ sein; aber es kann jeden andern positiven, oder negativen Werth haben. —

Wenn das in Rede stehende Verhältniß $= -1$ ist, so sagt man: die vier Punkte sind im harmonischen Verhältniß, und es finden alsdann zwischen ihnen verschiedene Relationen statt, wo-

von mehrere in der Geometrie von hoher Wichtigkeit ſind, und ſpäter näher erörtert werden ſollen. —



§. 11. Geometriſche Eigenſchaften des anharmoniſchen Verhältniſſes. — Wenn man von demſelben Punkte O aus durch vier in gerader Linie liegende Punkte a, b, c, d vier Gerade A, B, C, D zieht, ſo iſt das anharmoniſche Verhältniß dieſer Geraden dem jener Punkte numeriſch gleich und von denſelben Zeichen. —

Denn in den beiden Dreiecken aOc, aOd hat man:

$$\frac{\sin aOc}{\sin c} = \frac{ac}{aO}, \quad \frac{\sin aOd}{\sin d} = \frac{ad}{aO},$$

folglich:

$$\frac{\sin aOc}{\sin aOd} = \frac{ac}{ad} \cdot \frac{\sin c}{\sin d},$$

und ebenſo:

$$\frac{\sin bOc}{\sin bOd} = \frac{bc}{bd} \cdot \frac{\sin c}{\sin d};$$

alſo endlich:

$$\frac{\sin aOc}{\sin aOd} : \frac{\sin bOc}{\sin bOd} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

und dieſe Gleichheit findet offenbar nicht blos in Beziehung auf die Zahlenwerthe, ſondern auch hinſichtlich der Zeichen ſtatt (§. 1 u. §. 5). Folglich ꝛc.

§. 12. Zieht man durch daſſelbe Büſchels zwei Sekanten oder Transverſalen, deren Durchſchnittspunkte mit ſeinen Strahlen reſp. a, b, c, d und a', b', c', d' ſind; ſo folgt aus dem letzten Satze offenbar, daß man ſowohl in Hinſicht des Zahlenwerthes, als des Zeichens die Gleichheit hat:

$$(\alpha) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

und dieselbe gilt offenbar auch noch, wenn die vier Strahlen des Büschels zu einander parallel werden. —

§. 13. Da die Sekanten oder Transversalen beliebige Richtungen haben können, so kann jede derselben zu einem Strahle des Büschels parallel sein, in welchem Falle sich das anharmonische Verhältniß vereinfacht und sich auf ein einfaches Verhältniß zweier Segmente reducirt. —

Wird z. B. die erste Sekante zu B parallel, so rückt der Punkt b ins Unendliche, es wird $\frac{bc}{bd} = 1$, das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d reducirt sich auf $\frac{ac}{ad}$, und man hat die Gleichheit:

$$\frac{ac}{ad} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

Desgleichen, wenn die zweite Transversale zu der Geraden D parallel wird, so reducirt sich das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a', b', c', d', wovon der letzte sich ins Unendliche entfernt, auf $\frac{a'c'}{b'c'}$ und man hat:

$$\frac{ac}{ad} = \frac{a'c'}{b'c'}.$$

Wenn beide Transversalen zu demselben Strahle, etwa D, also auch unter sich parallel sind; so werden sie proportionel getheilt, so daß man hat:

$$ac : bc = a'c' : b'c';$$

also auch:

$$ac - bc : bc = a'c' - b'c' : b'c',$$

d. h.

$$ab : bc = a'b' : b'c', \text{ etc.}$$

wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke direkt folgt. —

§. 13ª. Die Gleichung (α) in §. 12 drückt den Satz aus: Wenn vier Punkte in gerader Linie liegen und man macht ihre Perspektive auf eine Ebene, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte in der Perspektive

dem der vier gegebenen Punkte gleich — oder kürzer: wenn mann von vier in gerader Linie liegenden Punkten die perspektivische Projektion macht, so wird ihr anharmonisches Verhältniß dadurch nicht geändert. —

§. 13ᵇ. Wenn vier Ebenen A, B, C, D durch dieselbe Gerade gehen, so werden sie von einer jeden Transversalebene nach vier Geraden geschnitten, deren anharmonisches Verhältniß dem der vier Ebenen stets gleich ist. —

Denn ist die Transversalebene auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der vier Ebenen senkrecht, so versteht sich der Satz von selbst, weil die Winkel, welche die Durchschnittlinien a, b, c, d der vier Ebenen mit der Transversalebene unter sich bilden, die Winkel, welche die Ebenen mit einander bilden, messen — und ist die Transversalebene schief gegen die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der vier Ebenen; so schneiden ihre Durchschnittslinien a', b', c', d' mit diesen Ebenen die vier Durchschnittslinien a, b, c, d mit der Normalebene offenbar in vier in gerader Linie liegenden Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, deren anharmonisches Verhältniß sowohl dem von a', b', c', d', als auch dem von a, b, c, d gleich ist (§. 11), und mithin ist auch das anharmonische Verhältniß von a, b, c, d dem von A, B, C, D gleich.

Wenn die vier Ebenen von einer Geraden geschnitten werden, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Durchschnittspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dem der vier Ebenen gleich.

Denn legt man durch die Gerade eine beliebige Transversalebene, so ist das anharmonische Verhältniß ihrer vier Durchschnittslinien a', b', c', d' mit den vier Ebenen, nach den vorhin Bewiesenen, dem dieser Ebene A, B, C, D und nach §. 11 auch dem der vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich; folglich ist das anharmonische Verhältniß von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dem von A, B, C, D gleich. —

Die beiden letzten Sätze finden offenbar auch noch statt, wenn die vier Ebenen A, B, C, D parallel sind. —

§. 14. Wenn zwischen den auf derselben Gerade genommenen Längen, Segmenten oder Strecken eine solche Relation stattfindet, daß durch Einführung von Verhältnissen von Segmenten, die von einem auf derselben Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte aus gezählt werden, alle Glieder dieser Relation nur an-

harmonische Verhältnisse und constante Coefficienten enthalten; so findet dieselbe Relation nach §. 11 auch zwischen den Sinussen der Winkel statt, welche die von irgend einem Punkte außerhalb der Geraden nach allen Punkten der Figur, mit Einschluß des in unendlicher Entfernung liegenden, gezogenen Geraden oder Strahlen mit einander bilden. —

Dieselbe Relation findet auch zwischen den Durchschnittspunkten dieser letzten Geraden mit irgend einer Transversale statt. —

Betrachten wir z. B. drei in gerader Linie liegenden Punkte a', b', c', zwischen welchen die Relation:

$$a'b' + b'c' + c'a' = 0$$

stattfindet (§. 2); so kann man dieselbe so einrichten, daß sie nur anharmonische Verhältnisse enthält. Denn schreibt man dieselbe so:

$$\frac{a'c'}{a'b'} + \frac{c'b'}{a'b'} = 1,$$

und führt einen unendlich weit entfernten Punkt d' ein, so daß $\frac{d'c'}{d'b'} = 1$ und $\frac{a'd'}{c'd'} = 1$ ist; so kann man auch setzen:

$$\frac{a'c'}{a'b'} : \frac{d'c'}{d'b'} + \frac{a'd'}{a'b'} : \frac{c'd'}{c'b'} = 1.$$

Da diese letzte Relation nur anharmonische Verhältnisse und constante Coefficienten enthält, welche hier = 1 sind; so findet sie auch zwischen den Sinussen der Winkel statt, welche vier von demselben Punkte nach den vier Punkten a', b', c', d' gezogene Strahlen A, B, C, D mit einander bilden, so wie zwischen den vier Segmenten, die zwischen den vier Durchschnittspunkten a, b, c, d dieser Strahlen mit einer beliebigen Transversale liegen (§. 11 u. §. 12).

§. 15. Wenn vier Punkte a, b, c, d auf derselben Geraden gegeben sind, so hat man zwischen den sechs Segmenten, welche durch je zwei dieser Punkte begrenzt werden, mit Berücksichtigung der Zeichen die Relation:

(1) $$ab.cd + ac.db + ad.bc = 0.$$

Denn dividirt man diese Gleichheit durch $ab.cd$, so ist:

(2) $$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = 1.$$

Zieht man ferner durch denselben Punkt O die vier Geraden

Oa, Ob, Oc, Od, und durchſchneidet die drei erſten mit einer zu der vierten Od parallelen Transverſale; ſo hat man, wenn a', b', c' die Durchſchnittspunkte ſind (§. 13):

$$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} = \frac{a'c'}{a'b'}, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{c'b'}{a'b'}.$$

Durch Subſtitution dieſer Werthe wird die Gleichheit (2);

$$\frac{a'c'}{a'b'} + \frac{c'b'}{a'b'} = 1,$$

folglich:

$$a'c' + c'b' = a'b' \text{ oder } a'b' + b'c' + c'a' = 0,$$

und da nach §. 2 dieſe letzte Gleichheit allgemein gültig iſt, ſo iſt es auch die Relation (1). — *)

Die Relation (1) wird gebildet, wenn man die Glieder der für die drei Punkte b, c, d ſtattfindenden Identität $bc + cd + db = 0$ reſp. ad, ab, ac multiplicirt. —

Man kann bemerken: daß von den drei in der Relation (1) vorkommenden Rechtecken oder Produkten das eine $(ac.db)$ aus zwei Segmenten beſteht, welche zum Theil zuſammenfallen, das zweite $(ab.cd)$ aus zwei Segmenten, welche kein gemeinſchaftliches Stück haben, und das dritte $(ad.bc)$ aus zwei Segmenten, wovon das eine ganz auf dem andern liegt. —

Die Gleichheit (1) drückt alſo aus: daß der Zahlenwerth des erſten Rechteckes oder Produktes der Summe der Zahlenwerthe der beiden andern Rechtecke oder Produkte gleich iſt. —

§. 16. Wenn vier Gerade A, B, C, D durch denſelben Punkt gehen, ſo findet zwiſchen den Sinuſſen der Winkel, welche ſie paarweiſe mit einander bilden, dieſelbe Relation ſtatt, wie zwiſchen den ſechs Segmenten, welche von

---

*) Man hat unmittelbar:

$$\begin{aligned} ac \,.\, bd &= (ab + bc)(bc + cd) \\ &= (ab + bc + cd)\, bc + ab \,.\, cd \\ &= ad \,.\, bc + ab \,.\, cd; \end{aligned}$$

alſo:

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc = 0.$$

vier in gerader Linie liegenden Punkten beſtimmt werden, nämlich:

(1′) $\sin(A,B)\sin(C,D)+\sin(A,C)\sin(D,B)+\sin(A,D)\sin(B,C).$

Denn dieſe Gleichheit kann ſo geſchrieben werden:

(2′) $$\frac{\sin(A,C)}{\sin(A,B)}:\frac{\sin(D,C)}{\sin(D,B)}+\frac{\sin(A,D)}{\sin(A,B)}:\frac{\sin(C,D)}{\sin(C,B)}=1,$$

und wenn man eine Transverſale zieht, welche die vier Geraden A, B, C, D in den vier Punkten a, b, c, d ſchneidet; ſo hat man für dieſe Punkte die Relation (2), woraus nach §. 11 die Relation (2′) folgt; alſo auch aus (1) die Relation (1′). —

§. 17. Aufgabe. — Wenn ein Punkt m einer Geraden durch das Verhältniß ſeiner Abſtände von zwei feſten Punkten a', b' dieſer Geraden beſtimmt iſt, das Verhältniß ſeiner Abſtände von zwei andern Punkten a, b derſelben als Funktion des erſten Verhältniſſes auszudrücken. —

Auflöſung. — Für die vier Punkte a, b, a', m hat man nach §. 15 die Relation:

$$ab\,.\,a'm+aa'\,.\,mb+am\,.\,ba'=0,$$

woraus folgt:

(3) $$\frac{am}{bm}=\frac{aa'}{ba'}+\frac{ab}{a'b}\cdot\frac{a'm}{bm}.$$

Ebenſo hat man für die vier Punkte a', b, b', m die Relation:

$$a'b\,.\,b'm+a'b'\,.\,mb+a'm\,.\,bb'=0,$$

woraus folgt:

(4) $$\frac{bm}{a'm}=\frac{bb'}{a'b'}+\frac{a'b}{a'b'}\cdot\frac{b'm}{a'm},$$

und endlich, wenn man in (3) ſubſtituirt:

(5) $$\frac{am}{bm}=\frac{aa'}{ba'}+\frac{\dfrac{ab}{a'b}}{\dfrac{bb'}{a'b'}+\dfrac{a'b}{a'b'}\cdot\dfrac{b'm}{a'm}},$$

als die geſuchte Funktion. —

§. 18. Wenn man von demſelben Punkte O nach den Punkten a, b, a', b', m die Geraden A, B, C, D, M zieht, ſo kann man für die

in den Gleichheiten (3), (4), (5) vorkommenden Segmente die Sinusse der entsprechenden Winkel setzen, wodurch man die analogen Formeln erhält:

$$(3') \quad \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \frac{\sin(A,A')}{\sin(B,A')} + \frac{\sin(A,B)}{\sin(A',B)} \cdot \frac{\sin(A',M)}{\sin(B,M)},$$

$$(4') \quad \frac{\sin(B,M)}{\sin(A',M)} = \frac{\sin(B,B')}{\sin(A',B')} + \frac{(\sin A',B)}{\sin(A',B')} \cdot \frac{\sin(B',M)}{\sin(A',M)},$$

$$(5') \quad \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \frac{\sin(A,A')}{\sin(B,A')} + \frac{\dfrac{\sin(A,B)}{\sin(A',B)}}{\dfrac{\sin(B,B')}{\sin(A',B')} + \dfrac{\sin(A',B)}{\sin(A',B')} \cdot \dfrac{\sin(B',M)}{\sin(A',M)}}.$$

§. 19. Wenn man auf einem Kreisumfange vier Punkte a, b, c, d nimmt, so findet zwischen den Sinussen der sechs Bogen, oder der halben Bogen, welche zwischen je zwei dieser vier Punkte liegen, eine ähnliche Relation statt, wie die Relation (1) zwischen den Segmenten einer Geraden; d. h. man hat:

$$\sin ab \,.\, \sin cd + \sin ac \,.\, \sin db + \sin ad \,.\, \sin bc = 0,$$

und:

$$\sin \tfrac{1}{2} ab \,.\, \sin \tfrac{1}{2} cd + \sin \tfrac{1}{2} ac \,.\, \sin \tfrac{1}{2} db + \sin \tfrac{1}{2} ad \,.\, \sin \tfrac{1}{2} bc = 0.$$

Die Richtigkeit der ersten Relation erhellet sofort, wenn man sich vom Mittelpunkte und die der zweiten, wenn man sich von irgend einem Punkte des Umfanges des Kreises durch die vier Punkte a, b, c, d Strahlen gezogen denkt (§. 16).

§. 20. Relationen, welche zwischen den drei anharmonischen Verhältnissen eines Systemes von vier Punkten, oder von vier Geraden stattfinden. — Die drei anharmonischen Verhältnisse eines Systemes von vier in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c, d sind (§. 7):

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc},$$

ihr Produkt ist $= -1$, und es finden zwischen je zwei derselben

sehr einfache Beziehungen statt, welche sich aus der zwischen den vier Punkten stattfindenden Relation:

$$ab.cd + ac.db + ad.bc = 0$$

ergeben, wenn man sie successive durch jedes ihrer drei Glieder dividirt. Dividirt man mit $ad.bc$, so erhält man:

$$-\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} - \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + 1 = 0$$

oder:

$$-\frac{1}{2^{te}\text{ Verh.}} - 1^{ste}\text{ Verh.} + 1 = 0.$$

Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{1}{2^{te}\text{ Verh.}} = 1 - 1^{ste}\text{ Verh.}$$

$$\frac{1}{3^{te}\text{ Verh.}} = 1 - 2^{te}\text{ Verh.}$$

$$\frac{1}{1^{ste}\text{ Verh.}} = 1 - 3^{te}\text{ Verh.}$$

Wenn also eins der drei anharmonischen Verhältnisse gegeben ist, so geben die vorhergehenden Relationen die Werthe der beiden andern, und man hat z. B. für das zweite und dritte anharmonische Verhältniß als Funktionen des ersten:

$$2^{tes}\text{ Verh.} = \frac{1}{1 - 1^{stes}\text{ Verh.}},$$

$$3^{tes}\text{ Verh.} = \frac{1^{stes}\text{ Verh.} - 1}{1^{stes}\text{ Verh.}}.$$

Die vorhergehenden Relationen gelten offenbar auch von den anharmonischen Verhältnissen eines Büschels von vier Geraden (§. 11).

§. 21. Neuer Ausdruck des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten, oder vier Geraden. — Das anharmonische Verhältniß von vier Punkten a, b, c, d kann auf einen Ausdruck gebracht werden, worin ein auf derselben Geraden genommener fünfter willkürlicher Punkt m vorkommt. Denn man kann setzen:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{db}{da} : \frac{cb}{ca} = \left(\frac{db}{da} : \frac{mb}{ma}\right) : \left(\frac{cb}{ca} : \frac{mb}{ma}\right).$$

Nun hat man aber für die vier Punkte a, b, d, m die Relation:

$$ab \cdot dm + ad \cdot mb + am \cdot bd = 0,$$

oder:

$$\frac{db \cdot ma}{da \cdot mb} = 1 - \frac{ab \cdot md}{ad \cdot mb},$$

und ebenso für die vier Punkte a, b, c, m die Relation:

$$\frac{cb \cdot ma}{ca \cdot mb} = 1 - \frac{ab \cdot mc}{ac \cdot mb};$$

folglich:

$$(1) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{1 - \frac{ab \cdot md}{ad \cdot mb}}{1 - \frac{ab \cdot mc}{ac \cdot mb}} = \frac{\frac{mb}{ab} - \frac{md}{ad}}{\frac{mb}{ab} - \frac{mc}{ac}}.$$

Nimmt man den Punkt m in unendlicher Entfernung an, so wird $\frac{md}{mb} = \frac{mc}{mb} = 1$, und man hat:

$$(2) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ad}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}};$$

ein neuer Ausdruck des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten, worin blos die Abstände eines derselben von den drei übrigen vorkommen.

§. 22. Für die drei Segmente mb, mc, md kann man die aus den Punkten b, c, d auf eine beliebige Gerade gefällten Perpendikel setzen. Denn wenn man annimmt, daß m im Durchschnittspunkte dieser Geraden und der Geraden ab liegt, so sind die Perpendikel, welche mit $\varepsilon, \gamma, \delta$ bezeichnet werden mögen, den Abschnitten mb, mc, md proportional, und der Ausdruck des anharmonischen Verhältnisses wird:

$$(3) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\frac{\varepsilon}{ab} - \frac{\delta}{ad}}{\frac{\varepsilon}{ab} - \frac{\gamma}{ac}}.$$

§. 23. Die Gleichheit (1) kann auf die Form:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{1 - \frac{ab}{ad} : \frac{mb}{md}}{1 - \frac{ab}{ac} : \frac{mb}{mc}}$$

gebracht werden, und da sie nur noch anharmonische Verhältnisse enthält; so folgt: daß sie auch auf die Sinusse der Winkel eines Büschels von fünf Strahlen A, B, C, D, M anwendbar ist, und das anharmonische Verhältniß der vier Geraden A, B, C, D sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$(4)\quad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} = \frac{\frac{\sin(M,B)}{\sin(A,B)} - \frac{\sin(M,D)}{\sin(A,D)}}{\frac{\sin(M,B)}{\sin(A,B)} - \frac{\sin(M,C)}{\sin(A,C)}},$$

wo die Gerade M ganz willkürlich ist. —

Wenn M auf A senkrecht ist, so ist:

$$\sin(M,B) = \cos(A,B),\ \frac{\sin(M,B)}{\sin(A,B)} = \frac{\cos(A,B)}{\sin(A,B)} = \operatorname{cotg}(A,B),\ \text{etc.}$$

und das anharmonische Verhältniß der vier Geraden hat zum Ausdruck:

$$(5)\quad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} = \frac{\operatorname{cotg}(A,B) - \operatorname{cotg}(A,D)}{\operatorname{cotg}(A,B) - \operatorname{cotg}(A,C)},$$

worin blos die Winkel vorkommen, welche eine der vier Geraden mit den drei andern macht. —

§. 24. Eigenschaften zweier Systeme von vier Punkten. — Wenn zwei Systeme von vier Punkten a, b, c, d und a', b', c', d' auf zwei verschiedenen Geraden liegen und einander paarweise entsprechen, so daß ein anharmonisches Verhältniß des ersten Systemes einem anharmonischen Verhältnisse des andern gleich ist; so sind auch die beiden andern anharmonischen Verhältnisse des ersten Systemes resp. den beiden andern anharmonischen Verhältnissen des zweiten Systemes gleich.

Diese Gleichheit folgt aus dem Ausdrucke des zweiten und dritten anharmonischen Verhältnisses als Funktion des ersten (§. 20).

Jede der drei Gleichheiten:

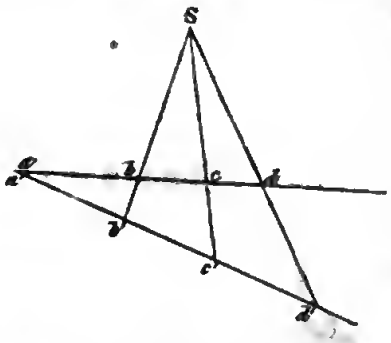
$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

$$\frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{a'd'}{a'b'} : \frac{c'd'}{c'b'},$$

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'},$$

hat also die beiden andern zur Folge. —

§. 25. Wenn auf zwei verschiedenen Geraden zwei Systeme von vier Punkten a, b, c, d und a', b', c', d' liegen, die einander paarweise entsprechen und gleiche anharmonische Verhältnisse geben, und man legt die beiden Geraden so, daß zwei homologe Punkte, etwa a, a', zusammenfallen; so gehen die drei Geraden, welche die drei andern Punkte des ersten Systems mit den drei homologen des zweiten verbinden, durch denselben Punkt S.



Denn es sei S der Durchschnittspunkt der beiden Verbindungslinien bb', cc' und d'' der Punkt, worin die Gerade Sd die Gerade ab' trifft; so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d dem der vier Punkte a, b', c', d'' gleich (§. 12), und nach der Voraussetzung auch gleich dem der vier Punkte a, b', c', d'. Mithin fallen die beiden Punkte d', d'' zusammen, und folglich geht auch die Gerade dd' durch den Punkt S. —

Dieser sehr einfache Satz wird in der Folge häufig angewandt werden, und gibt auch einen direkten Beweis des Satzes in §. 24. Denn da die drei Geraden bb', cc', dd' durch denselben Punkt S gehen, so kann man die beiden Geraden $abcd, ab'c'd'$ als zwei Transversalen betrachten, welche dasselbe Büschel der vier Geraden Sa, Sb, Sc, Sd durchschneiden; und folglich ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d, wie man es auch bilden mag, immer dem der vier Punkte a', b', c', d' gleich (§. 12).

§. 26. Wenn zwei Systeme von vier Punkten a, b, c, d und a', b', c', d', welche einander paarweise entsprechen, gleiche anharmonische Verhältnisse haben; so können die Punkte des zweiten Systemes denen des ersten noch in drei andern Aufeinanderfolgen entsprechen, ohne daß die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse aufhört. —

Denn nach der Voraussetzung hat man die Gleichheit:

(1) $$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

welche auch auf folgende drei Arten geschrieben werden kann:

(2) $$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{b'd'}{b'c'} : \frac{a'd'}{a'c'},$$

(3) $$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'},$$

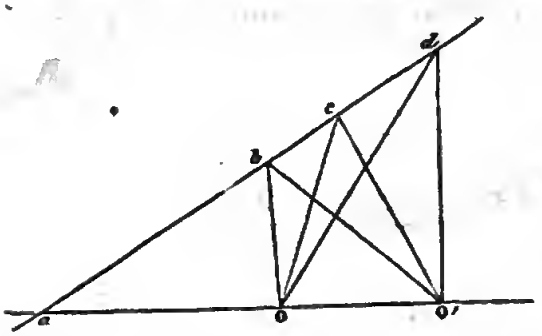
(4) $$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{d'b'}{d'a'} : \frac{c'b'}{c'a'},$$

und diese vier Gleichheiten drücken aus: daß den vier Punkten a, b, c, d successive die vier Punkte a', b', c', d'; b', a', d', c'; c', d', a', b'; d', c', b', a' entsprechen, wodurch der Satz bewiesen ist. —

§. 27. Eigenschaften zweier Büschel von vier Geraden. — Wenn zwei Büschel von vier Geraden, welche einander paarweise entsprechen, so beschaffen sind, daß ein anharmonisches Verhältniß des ersten dem entsprechenden des zweiten gleich ist; so sind auch die beiden andern anharmonischen Verhältnisse des ersten Büschels den entsprechenden des zweiten gleich. —

Denn durch eins der drei anharmonischen Verhältnisse sind auch die beiden andern bestimmt (§. 20).

§. 28. Wenn zwei Büschel von vier Geraden Oa, Ob, Oc, Od und $O'a, O'b, O'c, O'd$, welche einander paarweise entsprechen, gleiche anharmonische Verhältnisse haben, und so liegen, daß zwei entsprechende Gerade Oa, $O'a$ in dieselbe Richtung



fallen; so treffen die drei andern Geraden des ersten Büschels die entsprechenden des zweiten in drei Punkten b, c, d, welche in gerader Linie liegen. —

Denn zieht man die Gerade bc, welche OO' in a trifft, und bezeichnen δ, δ' die Punkte, wo sie die Geraden $Od, O'd$ schneidet; so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, δ dem

der vier Punkte a, b, c, δ' gleich, mithin fallen die Punkte δ, δ' zuſammen, und folglich ſchneiden ſich die Geraden $Od, O'd$ auf der Geraden bc.

Dieſer Satz wird uns in der Folge ſehr nützlich ſein, und liefert einen direkten Beweis des Satzes in §. 27. Denn da die vier Punkte a, b, c, d in gerader Linie liegen, ſo iſt ihr anharmoniſches Verhältniß, wie man es auch bilden mag, immer den entſprechenden anharmoniſchen Verhältniſſen der beiden Büſchel gleich, und folglich müſſen dieſe unter ſich gleich ſein. —

§. 29. Wenn zwei Büſchel von vier Geraden, A, B, C, D und A', B', C', D', welche einander paarweiſe entſprechen, gleiche anharmoniſche Verhältniſſe haben; ſo können die Geraden des zweiten Büſchels denen des erſten auch noch in drei andern Aufeinanderfolgen entſprechen, ohne daß die Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe geſtört wird. —

Der Beweis iſt ganz derſelbe, wie der in §. 26.

Dieſer Satz und der in §. 26 wird häufig angewandt bei dem Beweiſe anderer Sätze. —

§. 30. Ausdrücke der Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe zweier Syſteme von vier Punkten. — Es ſeien a, b, c, d und a', b', c', d' die beiden Syſteme von vier Punkten, ſo wird die Gleichheit ihrer anharmoniſchen Verhältniſſe durch eine der zweigliedrigen Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{ac}{ad} : \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{a'c'}{a'd'} : \dfrac{b'c'}{b'd'}, \\ \dfrac{ad}{ab} : \dfrac{cd}{cb} = \dfrac{a'd'}{a'b'} : \dfrac{c'd'}{c'b'}, \\ \dfrac{ab}{ac} : \dfrac{db}{dc} = \dfrac{a'b'}{a'c'} : \dfrac{d'b'}{d'c'} \end{cases}$$

ausgedrückt. —

Die zweiten Theile dieſer Gleichungen ſind die anharmoniſchen Verhältniſſe des zweiten Syſtemes $a' b' c' d'$, und nach §. 20 iſt:

$$1^{\text{tes}}\ \text{anh. Verh.} = 1 - \frac{1}{2^{\text{tes}}\ \text{anh. Verh.}},$$

$$2^{\text{tes}} \text{ anh. Verh.} = 1 - \frac{1}{3^{\text{tes}} \text{ anh. Verh.}},$$

$$3^{\text{tes}} \text{ anh. Verh.} = 1 - \frac{1}{1^{\text{tes}} \text{ anh. Verh.}}.$$

Hiernach gehen die Gleichungen (1) in die folgenden dreigliedrigen über:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} = 1, \\ \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} + \frac{a'c'}{a'b'} : \frac{d'c'}{d'b'} = 1, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} + \frac{a'd'}{a'c'} : \frac{b'd'}{b'c'} = 1, \end{cases}$$

welche oft angewandt werden.

Wenn man auf der Geraden $a'b'$ einen willkürlichen Punkt m' annimmt, so kann man die Gleichheit zweier anharmonischer Verhältnisse durch die Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ad}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}} = \frac{\frac{m'b'}{a'b'} - \frac{m'd'}{a'd'}}{\frac{m'b'}{a'b'} - \frac{m'c'}{a'c'}}$$

ausdrücken (§. 21), welcher man die einfachere Form geben kann:

$$\frac{m'b'}{a'b'}\left(\frac{1}{ac} - \frac{1}{ad}\right) + \frac{m'c'}{a'c'}\left(\frac{1}{ad} - \frac{1}{ab}\right) + \frac{m'd'}{a'd'}\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}\right) = 0,$$

$$\frac{m'b'}{a'b'} \cdot \frac{cd}{ac.ad} + \frac{m'c'}{a'c'} \cdot \frac{db}{ad.ab} + \frac{m'd'}{a'd'} \cdot \frac{bc}{ac.ab} = 0,$$

oder:

$$(3)\quad ab.cd. \frac{m'b'}{a'b'} + ac.db. \frac{m'c'}{a'c'} + ad.bc. \frac{m'd'}{a'd'} = 0.$$

Wenn man auf der Geraden ab einen willkürlichen Punkt m annimmt, so hat man ebenso:

$$(3')\quad a'b'.c'd'. \frac{mb}{ab} + a'c'.d'b'. \frac{mc}{ac} + a'd'.b'c'. \frac{md}{ad} = 0.$$

Wenn man die willkürlichen Punkte m, m' in unendlicher Entfernung annimmt, die Gleichung (3) durch $m'd'$ und die Glei-

chung (3′) durch md dividirt; ſo wird $\frac{m'b'}{m'd'} = \frac{m'c'}{m'd'} = \frac{m'd'}{m'd'} = 1$,

$\frac{mb}{md} = \frac{mc}{md} = \frac{md}{md} = 1$, und man hat:

$$(4) \qquad \frac{ab \,.\, cd}{a'b'} + \frac{ac \,.\, db}{a'c'} + \frac{ad \,.\, bc}{a'd'} = 0,$$

$$(4') \qquad \frac{a'b' \,.\, c'd'}{ab} + \frac{a'c' \,.\, d'b'}{ac} + \frac{a'd' \,.\, b'c'}{ad} = 0.$$

Jede dieſer vier Gleichungen (3), (3′), (4), (4′) drückt die Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe zweier Syſteme von vier Punkten aus.

Die Gleichung (3) läßt ſich auch ſo ſchreiben, daß ſie nur anharmoniſche Verhältniſſe enthält, nämlich:

$$\left(\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}\right)\left(\frac{m'b'}{m'd'} : \frac{a'b'}{a'd'}\right) + \left(\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}\right)\left(\frac{m'c'}{m'd'} : \frac{a'c'}{a'd'}\right) - 1 = 0,$$

und daſſelbe gilt von der Gleichung (3′). —

§. 31. Ausdrücke der Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe zweier Büſchel von vier Geraden. — Die Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe zweier Büſchel von vier Geraden wird offenbar durch ähnliche Formeln ausgedrückt, wie die obigen, nämlich:

$$(5) \qquad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} = \frac{\sin(A',C')}{\sin(A',D')} : \frac{\sin(B',C')}{\sin(B',D')},$$

$$(6) \qquad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} + \frac{\sin(A',C')}{\sin(A',D')} : \frac{\sin(B',C')}{\sin(B',D')} = 1$$

$$(7) \quad \sin(A,B)\sin(C,D)\frac{\sin(M',B')}{\sin(A',B')} + \sin(A,C)\sin(D,B)\frac{\sin(M',C')}{\sin(A',C')}$$

$$+ \sin(A,D)\sin(B,C)\frac{\sin(M',D')}{\sin(A',D')} = 0.$$

Dieſe letzte Gleichung entſpringt aus der Gleichung (3), weil ſich dieſe ſo ſchreiben läßt, daß ſie nur anharmoniſche Verhältniſſe enthält, ſo daß man die Segmente durch Sinuſſe erſetzen darf. —

§. 32. Ausdrücke der Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe eines Büſchels von vier Geraden und eines Syſtemes von vier Punkten. —

Es ſeien A, B, C, D die vier Geraden und a', b', c', d' die ihnen reſpective entſprechenden Punkte, wie wenn dieſe von dem Durchſchneiden der Geraden mit einer Transverſale herrührten; ſo wird die Gleichheit der beiden anharmoniſchen Verhältniſſe ausgedrückt durch die Gleichungen (1) und (2), wenn man darin für das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d das der vier Geraden A, B, C, D ſetzt, wodurch man folgende Gleichungen erhält:

$$(9) \qquad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

$$(9) \qquad \frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)} : \frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)} + \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} = 1$$

$$(10) \quad \sin(A,B)\sin(C,D)\frac{m'b'}{a'b'} + \sin(A,C)\sin(D,B)\frac{m'c'}{a'c'} + \sin(A,D)\sin(B,C)\frac{m'd'}{a'd'} = 0.$$

Ferner hat man die Gleichung:

$$(11) \quad a'b' \cdot c'd' \cdot \frac{\sin(M,B)}{\sin(A,B)} + a'c' \cdot d'b' \cdot \frac{\sin(M,C)}{\sin(A,C)} + a'd' \cdot b'c' \cdot \frac{\sin(M,D)}{\sin(A,D)} = 0,$$

welche ſich aus der Gleichung (3') ergibt, wenn man für die Punkte a, b, c, d, m die Geraden A, B, C, D, M ſetzt.

Wenn man die Gleichung (10) durch $m'd'$ dividirt, und dann den Punkt m' in unendlicher Entfernung annimmt; ſo iſt $\frac{m'b'}{m'd'} = \frac{m'c'}{m'd'} = 1$, und man erhält:

$$(12) \qquad \frac{\sin(A,B)\sin(C,D)}{a'b'} + \frac{\sin(A,C)\sin(D,B)}{a'c'} + \frac{\sin(A,D)\sin(B,C)}{a'd'} = 0.$$

Da nach §. 11 das anharmoniſche Verhältniß eines Büſchels von vier parallelen Geraden A', B', C', D' durch das der vier Durchſchnittspunkte a', b', c', d' derſelben mit einer Transverſale ausgedrückt wird; ſo folgt: daß die Gleichheit der anharmoniſchen

Verhältniſſe zweier Büſchel von vier Geraden durch die vorhergehenden Gleichungen ausgedrückt wird, wenn die Strahlen des einen Büſchels parallel ſind. —

Harmoniſches Verhältniß von vier Punkten.

§. 33. Wenn zwei Punkte a, a' ein Segment ef in proportionale Theile, d. h. ſo theilen, daß man ohne Rückſicht auf das Zeichen der Segmente hat:

$$\frac{ae}{af} = \frac{a'e}{a'f};$$

ſo ſagt man: die beiden Punkte a, a' theilen das Segment ef harmoniſch, oder die beiden Punkte a, a' ſind in Beziehung auf e, f harmoniſch conjugirt. — Umgekehrt ſind auch die beiden Punkte e, f in Beziehung auf a, a' harmoniſch conjugirt und theilen das Segment aa' harmoniſch. — Man ſagt auch: daß die vier Punkte a, a', e, f eine harmoniſche Proportion bilden. — Der Kürze wegen werden wir oft auch ſagen: die beiden Segmente aa', ef ſind harmoniſch conjugirt. —

Der Ausdruck: harmoniſches Verhältniß von vier Punkten kommt daher: daß die drei von einem der vier Punkte, z. B. von a, bis zu den drei andern f, a', e genommenen Strecken oder Segmente af, aa', ae eine harmoniſche Proportion bilden, d. h. eine geometriſche Proportion aus drei Zahlen von ſolcher Beſchaffenheit: daß ſich die erſte zur dritten verhält, wie der Unterſchied zwiſchen der erſten und zweiten zu dem Unterſchiede der zweiten und dritten. — In der That iſt, wenn man in der Relation:

$$\frac{ae}{af} = \frac{a'e}{a'f}$$

für $a'e$ und $a'f$ reſp. $aa' - ae$ und $af - aa'$ ſetzt, und vom Zeichen der Segmente abſtrahirt:

$$\frac{af}{ae} = \frac{af - aa'}{aa' - ae},$$

d. h.

$$\frac{\text{1. Segm.}}{\text{3. Segm.}} = \frac{\text{1. Segm.} - \text{2. Segm.}}{\text{2. Segm.} - \text{3. Segm.}}$$

Das Segment, welches zwei conjugirte Punkte verbindet, muß immer das zweite ſein. —

§ 34. Man pflegt die harmonische Relation von vier Punkten a, a', e, f durch die Gleichung:

$$\frac{ae}{af} = \frac{a'e}{a'f}$$

auszudrücken, indem man blos den absoluten Werth der Segmente, ohne die ihren Richtungen entsprechenden Zeichen, in Betracht zieht, weil man bei der Umformung dieser Relation, oder ihrer Verbindung mit andern die Figur unter den Augen hat, und die relative Lage der Punkte in Betracht zieht. — Um aber dieser Gleichung, so wie allen daraus abzuleitenden, die gehörige Allgemeinheit zu geben, müssen wir auch das Zeichen in Betracht ziehen, und werden in Zukunft immer schreiben:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f},$$

oder:

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = -1. \tag{1}$$

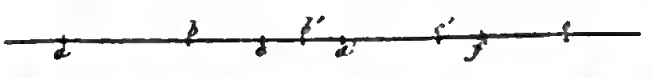
Der erste Theil der letzten Gleichung drückt das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, a', e, f aus, und man kann daher sagen: Vier Punkte bilden eine harmonische Proportion, wenn ihr anharmonisches Verhältniß $= -1$ ist; und in §. 10 haben wir gesehen, daß dasselbe nicht $= +1$ sein kann. —

§. 35. Da der Punkt a' auf dem Segmente ef und der Punkt a diesseits desselben liegt, also $ae < af$ ist; so folgt aus $\frac{ae}{af} = \frac{a'e}{a'f}$, daß $a'e < a'f$ ist.

Wenn der Punkt a sich von e entfernt, so entfernt sich a' auch von e; aber weit langsamer, so daß, wenn a in unendlicher Entfernung liegt, also $\frac{ae}{af} = 1$ ist, auch $\frac{a'e}{a'f} = 1$ ist; d. h. a' liegt in der Mitte von ef.

Man hat also die beiden Sätze: 1, Wenn vier Punkte eine harmonische Relation bilden, so liegt die Mitte zweier conjugirter Punkte (e,f) immer jenseits des zwischen den beiden andern conjugirten Punkten (a, a') liegenden Seg-

mentes. — 2, Wenn einer der vier Punkte (a) in unendlicher Entfernung liegt, so ist sein conjugirter Punkt (a') die Mitte der beiden andern Punkte (e, f). —



§. 36. Es seien b, b', so wie auch a, a' zwei harmonische conjugirte Punkte in Beziehung auf die beiden Punkte e, f. Wenn der auf dem Segmente ef liegende Punkt b' näher bei e liegt als a', so liegt auch der Punkt b näher bei e als a, so daß das Segment bb' ganz auf dem Segmente aa' liegt. Wenn ein Punkt c' weiter gegen f zu genommen wird, so liegt sein conjugirter Punkt c jenseits f, und die beiden Segmente aa', cc' haben keinen gemeinschaftlichen Punkt. — Man hat also den Satz:

Wenn zwei Segmente in Beziehung auf ein drittes harmonisch conjugirt sind, so haben sie entweder gar keinen Punkt mit einander gemein, oder das eine liegt ganz auf dem andern. —

Hieraus folgt: Wenn zwei Segmente zum Theil zusammenfallen, so kann man keine zwei Punkte bestimmen, welche beide harmonisch theilen — und wir werden in diesem Falle sagen: daß die beiden Theilungspunkte imaginär sind, weil die Gleichung, welche zur Bestimmung derselben dient, imaginäre Wurzeln hat. — (Vergl. weiter unten die Anmerk.)

§. 37. Verschiedene Ausdrücke der harmonischen Relation von vier Punkten. Früher haben wir gesehen, daß vier Punkte drei verschiedene anharmonische Verhältnisse geben, wovon eins zur Bestimmung der übrigen genügt (§§. 20 und 30). Wenn das eine anharmonische Verhältniß:

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = -1$$

ist, so sind die beiden andern:

$$\frac{af}{aa'} : \frac{ef}{ea'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{aa'}{ae} : \frac{fa'}{fe} = 2,$$

woraus folgt:

$$(2) \qquad \begin{cases} aa' \,.\, ef = 2\, af \,.\, ea', \\ aa' \,.\, fe = 2\, ae \,.\, fa'. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen drückt also aus: daß die vier Punkte $a, a'; e. f$ im harmonischen Verhältniße stehen. —

Nach der Gleichung (2) in §. 21 hat man:

$$\frac{\frac{1}{aa'} - \frac{1}{af}}{\frac{1}{aa'} - \frac{1}{ae}} = -1,$$

oder:

$$\frac{2}{aa'} = \frac{1}{ae} + \frac{1}{af}, \tag{3}$$

und ebenso:

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'},$$

Hieraus erhellet: daß der reciproke Werth der Entfernung eines Punktes von seinem conjugirten das arithmetische Mittel der reciproken Werthe der Entfernungen desselben Punktes von den beiden andern Punkten ist.

§. 38. Wenn $a, b, c, d, \ldots$ mehrere Punkte auf einer geraden Linie sind, und man nimmt einen Punkt m so an, daß der reciproke Werth seines Abstandes von einem bestimmten Punkte O derselben Geraden das arithmetische Mittel aus den reciproken Werthen der Abstände der Punkte $a, b, c, d, \ldots$ von demselben Punkte O ist, so daß man hat:

$$\frac{n}{Om} = \frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} \quad \frac{1}{Oc} + \ldots,$$

von n die Anzahl der Punkte $a, b, c, \ldots$ bezeichnet, und jede Entfernung mit dem Zeichen + oder − genommen werden muß; so nennt man die Entfernung Om nach Maklaurin das harmonische Mittel aus den Entfernungen $Oa, Ob, \ldots$, und den Punkt m nach Poncelet den Mittelpunkt der harmonischen Mittel der Punkte $a, b, c, \ldots$

Wenn also vier Punkte eine harmonische Proportion bilden, so ist die Entfernung eines derselben von seinem conjugirten das harmonische Mittel aus seinen Entfernungen von den beiden andern Punkten. — Oder: Ein Punkt ist in Beziehung auf seinen conjugirten der Mit-

telpunkt der harmonischen Mittel der beiden andern Punkte. —

§. 39. Relationen mit einem willkürlichen Punkte. — Der allgemeine Ausdruck des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten, worin ein fünfter willkürlicher Punkt m vorkommt (§. 21), wird, wenn dieses Verhältniß $= -1$ ist:

$$(4) \qquad 2\frac{ma'}{aa'} = \frac{me}{ae} + \frac{mf}{af},$$

und ebenso hat man:

$$2 . \frac{mf}{ef} = \frac{ma}{ea} + \frac{ma'}{ea'}.$$

Jede dieser Gleichungen drückt also aus: daß die beiden Paare conjugirter Punkte a, a' und e, f eine harmonische Proportion bilden.

§. 40. Für die drei Segmente ma', me, mf kann man die von den drei Punkten $a'; e, f$ auf eine durch den Punkt m gezogene Gerade gefällten Perpendikel, welche diesen Segmenten proportional sind, setzen, und da der Punkt m willkürlich ist; so folgt: daß, wenn $\alpha', \varepsilon, \varphi$ die von den drei Punkten a', e, f auf eine beliebige Gerade gefällten Perpendikel bezeichnen, man die Relation hat:

$$2 . \frac{\alpha'}{aa'} = \frac{\varepsilon}{ae} + \frac{\varphi}{af}.$$

§. 41. Beziehen wir die vier Punkte a, a', e, f auf einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt m, so geht die Gleichung:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f}$$

in folgende über:

$$\frac{me - ma}{mf - ma} = -\frac{me - ma'}{mf - ma'},$$

oder:

$$(5) \quad (ma + ma')(me + mf) = 2\, ma . ma' + 2\, me . mf;$$

wofür man auch setzen kann:

$$ma(me - ma') + ma'(mf - ma) + me(ma' - mf) + mf(ma - me) = 0,$$

oder:

(6) $$ma.a'e+ma'.af+me.fa'+mf.ea=0;$$

und ebenso hat man:

$$ma.a'f+ma'.ae+me.fa+mf.ea'=0.$$

§. 42. Es sei α die Mitte von a,a' und O die von e,f;

so wird die Gleichung (5):

(7) $$ma.ma'+me.mf=2m\alpha.mO.$$

Diese Relation wird uns sehr nützlich sein, und wir werden daraus bald verschiedene, sehr einfache Relationen herleiten, indem wir den willkürlichen Punkt m besondere Lagen annehmen lassen. —

§. 43. Das harmonische Verhältniß wird auch durch die Relation ausgedrückt:

(8) $$ma.ma'.ef+(me)^2.f\alpha+(mf)^2.\alpha e=0;$$

oder:

(8′) $$me.mf.aa'+(ma)^2.a'O+(ma')^2.Oa=0.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen, z. B. der ersten, läßt sich leicht auf verschiedene Weisen darthun. — 1, Wenn die Gleichung (8) nicht identisch ist für jede Lage des Punktes m, so dient sie zur Bestimmung der Lagen dieses Punktes, welche ihr genügen, und es gibt solcher Lagen nur zwei. Denn wenn man alle Punkte m, a.... auf einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt A bezieht, so erscheint das Segment Am in einer Gleichung des zweiten Grades. — Dieser Gleichung geschieht aber durch mehr als zwei Lagen des Punktes m Genüge; denn wenn man m successive mit den Punkten a,a',e,f zusammenfallen läßt, so erhält man schon erwiesene Relationen, und wenn man den Punkt m in unendlicher Entfernung annimmt; so erhält man die Identität $ef+fa+ae=0$. Die Gleichung des zweiten Grades, von welcher die Lagen des Punktes m abhängen, hätte also mehr als zwei Wurzeln, woraus folgt: daß sie eine identische ist; d. h. die Gleichung (8) findet für alle Lagen des Punktes m statt. —

2, Man hat die Relation (7):

$$ma.ma'+me.mf=2m\alpha.mO,$$

und die beiden Identitäten:

$$(me)^2 + me \,.\, mf = 2\, me \,.\, m\,O,$$
$$(mf)^2 + me \,.\, mf = 2\, mf \,.\, m\,O.$$

Multiplicirt man dieſe drei Gleichungen reſp. mit $ef, f\alpha, \alpha e$ und addirt die Produkte, ſo kommt:

$$ma \,.\, ma' \,.\, ef + (me)^2 \,.\, f\alpha + (mf)^2 \alpha e + me \,.\, mf(ef + f\alpha + \alpha e)$$
$$= 2\, mO(m\alpha \,.\, ef + me \,.\, f\alpha + mf \,.\, \alpha e).$$

Nun hat man aber für die drei Punkte α, e, f:

$$ef + f\alpha + \alpha e = 0, \quad (\S.\ 2)$$

und für die vier Punkte m, α, e, f:

$$m\alpha \,.\, ef + me \,.\, f\alpha + mf \,.\, e\alpha = 0; \quad (\S.\ 15)$$

es bleibt alſo:

$$ma \,.\, ma' \,.\, ef + (me)^2 \,.\, f\alpha + (mf)^2 \,.\, \alpha e = 0,$$

w. z. b. w.

Wenn man in der letzten Gleichung $fe - \alpha e$ ſtatt $f\alpha$ ſetzt, ſo hat man:

$$ma \,.\, ma' \,.\, ef + (me)^2 \,.\, fe - [(me)^2 - (mf)^2]\, \alpha e = 0,$$

oder wegen:

$$(me)^2 - (mf)^2 = (me + mf)(me - mf) = 2\, mO \,.\, fe:$$

$$(9) \qquad ma \,.\, ma' - (me)^2 + 2\, \alpha e \,.\, mO = 0.$$

§. 44. Folgerungen aus der Gleichung (7). — Relationen, worin die Mittelpunkte der beiden Segmente aa', ef vorkommen. — Wenn man in der Gleichung (7) den Punkt m mit α zuſammenfallen läßt, ſo kommt:

$$\alpha a \,.\, \alpha a' + \alpha e \,.\, \alpha f = 0,$$

oder wegen $\alpha a' = -\alpha a$:

$$(10) \qquad (\alpha a)^2 = \alpha e \,.\, \alpha f.$$

Ebenſo hat man:

$$(10') \qquad (Oe)^2 = Oa \,.\, Oa',$$

Dieſe letzte Gleichung gibt:

$$(Oe)^2 = (O\alpha)^2 - (\alpha a)^2, \quad (\S.\ 3.)$$

oder:

$$(11) \qquad (\alpha a)^2 + (Oe)^2 = (O\alpha)^2,$$

Digitized by Google

und zwischen den vier Punkten a, a', e, f:

$$(aa')^2 + (ef)^2 = (ae + a'f)^2. \tag{12}$$

§. 45. Wenn der Punkt m mit dem Punkte e zusammenfällt, so hat man:

$$ea \,.\, ea' = 2ea \,.\, eO;$$

wegen $2eO = ef$ also:

$$ea \,.\, ea' = ea \,.\, ef. \tag{13}$$

Nach §§. 37 und 38 ist ef das harmonische Mittel der Entfernungen der beiden Punkte a, a' von dem Punkte e, und ea ist die sogenannte mittlere Entfernung der beiden Punkte a, a' von demselben Punkte e. — Die Gleichung (13) drückt also den Satz aus:

Das Produkt der Entfernungen zweier Punkte von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte ist gleich dem Produkte des harmonischen Mittels und der mittleren Entfernung dieser beiden Punkte in Beziehung auf diesen Anfangspunkt. —

§. 46. Wenn man die Gleichung (13) durch die Gleichung:

$$fa \,.\, fa' = fa \,.\, fe,$$

welche denselben Satz ausdrückt, dividirt; so kommt:

$$\frac{ea \,.\, ea'}{fa \,.\, fa'} = -\frac{ea}{fa}, \tag{14}$$

und wegen der Gleichung (1):

$$\frac{(ae)^2}{(af)^2} = \frac{ae}{af}. \tag{15}$$

Ebenso hat man:

$$\frac{(ea)^2}{(ea')^2} = \frac{Oa}{Oa'}. \tag{15'}$$

§. 47. Die Gleichung (10) kann man auch so schreiben:

$$\frac{(\alpha a)^2}{(\alpha e)^2} = \frac{af}{ae},$$

und folglich ist wegen (15):

$$\frac{(\alpha a)^2}{(\alpha e)^2} = \frac{(fa)^2}{(ea)^2}.$$

oder:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{\alpha e}{\alpha a}. \tag{16}$$

Wegen (10) kann man auch ſchreiben:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{\alpha a}{af}. \tag{17}$$

§. 48. Relationen mit zwei willkürlichen Punkten. — Die Gleichung (6) kann folgendermaßen geſchrieben werden:

$$-\frac{ma}{mf} : \frac{ea'}{ea} - \frac{ma'}{mf} \cdot \frac{af}{ae} + \frac{me}{ae} \cdot \frac{a'f}{mf} + 1 = 0,$$

oder wenn n den in unendlicher Entfernung liegenden Punkt bezeichnet:

$$-\left(\frac{ma}{mf} : \frac{na}{nf}\right)\left(\frac{ea'}{ea} : \frac{na'}{na}\right) - \left(\frac{ma'}{mf} : \frac{na'}{nf}\right)\left(\frac{af}{ae} : \frac{nf}{ne}\right) + \left(\frac{me}{ae} : \frac{mn}{an}\right)\left(\frac{a'f}{mf} : \frac{a'n}{mn}\right) + 1 = 0.$$

Da in dieſer Gleichung nur anharmoniſche Verhältniſſe vorkommen, ſo findet ſie für jede Lage des Punktes n ſtatt (§. 14).

Multiplicirt man mit $mf.ea.na'$, ſo kommt:

$$ma.nf.a'e + ma'.ne.af + me.na.fa' + mf.na'.ea = 0, \tag{18}$$

in welcher Gleichung die vier in harmoniſcher Relation ſtehenden Punkte $a, a' e, f$ und zwei willkürliche Punkte m, n vorkommen. —

§. 49. Wir wollen die Gleichung (7) wie folgt ſchreiben:

$$\frac{ma}{m\alpha} \cdot \frac{ma'}{mO} + \frac{me}{m\alpha} \cdot \frac{mf}{mO} = 2,$$

oder wenn n den in unendlicher Entfernung liegenden Punkt bezeichnet:

$$\left(\frac{ma}{m\alpha} : \frac{na}{n\alpha}\right)\left(\frac{ma'}{mO} : \frac{na'}{nO}\right) + \left(\frac{me}{m\alpha} : \frac{ne}{n\alpha}\right)\left(\frac{mf}{mO} : \frac{nf}{nO}\right) = 2.$$

Da in dieſer Gleichung nur anharmoniſche Verhältniſſe vorkommen, ſo findet ſie für eine beliebige Lage des Punktes n ſtatt; aber mit der Bedingung, daß α und O nicht mehr die Mitten der Segmente aa', ef, ſondern die harmoniſch conjugirten Punkte von n in Bezug auf dieſe Segmente ſind. — Die Gleichung nimmt die Form an:

$$(19)\qquad \frac{ma\,.\,ma'}{na\,.\,na'}+\frac{me\,.\,mf}{ne\,.\,nf}=2\frac{m\alpha\,.\,mO}{n\alpha\,.\,nO}.$$

Da der Punkt m willkürlich ist, so wollen wir denselben in unendlicher Entfernung annehmen, und mit $m\alpha\,.\,mO$ dividiren. Alsdann wird $\frac{ma}{m\alpha}=\frac{ma'}{mO}=\ldots=1$, und es kommt:

$$(7')\qquad \frac{1}{na\,.\,na'}+\frac{1}{ne\,.\,nf}=\frac{2}{n\alpha\,.\,nO}.$$

Aber es ist zu bemerken: daß diese Gleichung, worin nur ein willkürlicher Punkt n vorkommt, im Grunde von der Gleichung (7) nicht verschieden ist. Denn schreibt man sie so:

$$(\mu)\qquad ne\,.\,nf+na\,.\,na'=2\cdot\frac{ne\,.\,nf}{nO}\,.\,\frac{na\,.\,na'}{n\alpha},$$

wo α der harmonisch conjugirte Punkt von n in Beziehung auf a, a' ist; so hat man, wenn a_1 die Mitte von a, a' bezeichnet:

$$na\,.\,na'=n\alpha\,.\,na_1,\ (\S.\ 45).$$

Ebenso hat man, wenn O_1 die Mitte von ef bedeutet:

$$ne\,.\,nf=nO\,.\,nO_1,$$

und die Gleichung (μ) wird folglich:

$$na\,.\,na'+ne\,.\,nf=2\,a\alpha_1\,.\,nO_1,$$

welches genau die Gleichung (7) ist.*) —

§. 50. Die Gleichung (8) kann auf die Form gebracht werden:

$$\frac{ma\,.\,ma'}{(mf)^2}\,.\,\frac{ef}{e\alpha}+\frac{(me)^2}{(mf)^2}\,.\,\frac{f\alpha}{e\alpha}-1=0,$$

oder wenn n den in unendlicher Entfernung liegenden Punkt bedeutet:

$$\left(\frac{ma}{mf}:\frac{na}{nf}\right)\left(\frac{ma'}{mf}:\frac{na'}{nf}\right)\left(\frac{ef}{n\alpha}:\frac{nf}{n\alpha}\right)$$
$$+\left(\frac{(me)^2}{(mf)^2}:\frac{(ne)^2}{(nf)^2}\right)\left(\frac{f\alpha}{e\alpha}:\frac{fn}{en}\right)-1=0.$$

*) Aus §. 14 folgt nur: daß eine Gleichung wie die in §. 48 auch für eine endliche, aber jedesmal bestimmte Entfernung des Punktes n gilt. — Daß die Gleichungen (7), (7') gleichbedeutend sind, folgt schon daraus: daß m und n ihre Rollen vertauschen.

Da diese Gleichung nur anharmonische Verhältnisse enthält, so bleibt der Punkt n ganz willkürlich, wofern α nur nicht mehr die Mitte des Segmentes aa', sondern der harmonisch conjugirte Punkt von n in Bezug auf a, a' ist. — Die Gleichung wird:

$$(20)\quad \frac{ma.ma'}{na.na'}\,ef.n\alpha+\frac{(me)^2}{(ne)^2}\,f\alpha.ne+\frac{(mf)^2}{(nf)^2}\,\alpha e.nf=0.$$

Wenn der Punkt m in unendlicher Entfernung liegt, so ist:

$$(21)\quad \frac{ef.n\alpha}{na.na'}+\frac{f\alpha}{ne}+\frac{\alpha e}{nf}=0.$$

Diese beiden letzten Gleichungen vereinfachen sich, wenn man darin $\frac{1}{n\alpha_1}$ für $\frac{n\alpha}{na.na'}$ setzt (§. 45). —

§. 51. Aufgabe. — Wenn man in einer harmonischen Proportion von vier Punkten $a, a'; e, f$ zwei conjugirte Punkte a, a' und die Mitte O der beiden andern e, f kennt, diese zu finden. —

Auflösung. Nach der Gleichung (10) hat man:

$$Oe=-Of=\pm\sqrt{Oa.Oa'}.$$

Soll dieser Ausdruck reell sein, so muß die Mitte O der beiden gesuchten Punkte e, f außerhalb des Segmentes aa' liegen; denn wenn sie auf demselben läge, so wäre das Produkt $Oa.Oa'$ negativ, und folglich der Ausdruck von Oe imaginär, weshalb man alsdann auch sagt: daß die beiden gesuchten Punkte imaginär sind. —

Wir werden später auf den Begriff imaginärer Punkte ausführlicher zurückkommen, müssen aber hier noch hinzufügen: daß, wenn die beiden gegebenen Punkte a, a' selbst imaginär wären, die beiden gesuchten Punkte e, f nothwendig reell sein würden, weil in diesem Falle, wie wir später sehen werden, das Produkt $Oa.Oa'$ positiv wird. —

Wenn α die Mitte des Segmentes aa' bedeutet, so ist nach §. 3:

$$Oe=-Of=\pm\sqrt{(O\alpha)^2-(\alpha a)^2}.$$

Ferner hat man:

$$\alpha e = \alpha O - eO, \alpha O = \frac{aO + a'O}{2}, Oe = \pm\sqrt{Oa.Oa'};$$

folglich:

$$\alpha e = \tfrac{1}{2}\left[aO + a'O \pm 2\sqrt{Oa.Oa'}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{aO} \pm \sqrt{a'O})^2,$$

oder wenn man mit $(\sqrt{aO} \mp \sqrt{a'O})^2$ multiplicirt und dividirt:

$$\alpha e = \tfrac{1}{2}\,\frac{(aa')^2}{(\sqrt{aO} \mp (\sqrt{a'O})^2}.$$

§. 52. Harmonische Büschel von vier Geraden. — Wenn vier durch denselben Punkt gehende Gerade $A, A'; E, F$ ein anharmonisches Verhältniß $= -1$ haben, so daß man hat:

$$\frac{\sin(A,E)}{\sin(A,F)} : \frac{\sin(A',E)}{\sin(A',F)} = -1;$$

so sagt man: daß diese vier Geraden ein harmonisches Büschel bilden. Auch sagt man: daß die beiden Geraden E, F in Beziehung auf die beiden andern A, A' harmonisch conjugirt sind — oder daß sie den Winkel von A, A' harmonisch theilen — und umgekehrt: daß A, A' in Bezug auf E, F harmonisch conjugirt sind — oder den Winkel von E, F harmonisch theilen. —

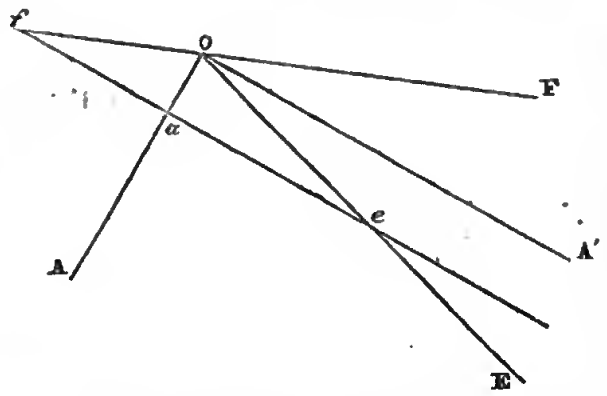
Diese vier Geraden schneiden eine Transversale in vier Punkten a, a', e, f, welche eine harmonische Proportion bilden; denn nach §. 11 hat man:

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = -1.$$

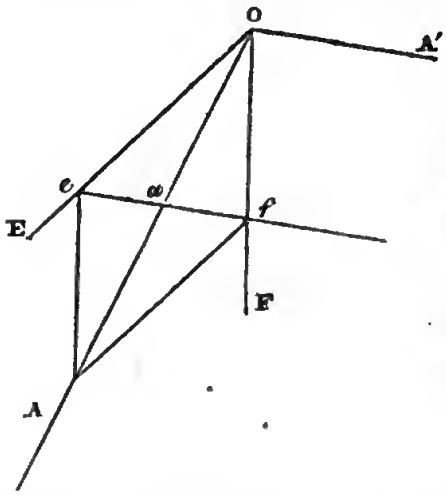
Wenn die Transversale zu einer der vier Geraden, etwa zu A', parallel ist; so liegt der Punkt a' in unendlicher Entfernung, und man hat blos:

$$\frac{ae}{af} = -1, \text{ also } ae = -af,$$

und mithin ist der Punkt a die Mitte des Segmentes ef.



Hieraus folgt: wenn die beiden Geraden A, A' auf einander senkrecht sind, so bilden die beiden Geraden E, F mit einer derselben gleiche Winkel; d. h. wenn zwei conjugirte Strahlen eines harmonischen Büschels auf einander senkrecht sind, so ist einer derselben die Halbirungslinie des von den beiden andern Strahlen gebildeten Winkels. — Und umgekehrt: die Halbirungslinie eines Winkels und das Perpendikel darauf theilen diesen Winkel harmonisch. —



Auch ist ein Büschel offenbar harmonisch, wenn seine Strahlen die Richtungen der Seiten und Diagonalen eines Parallelogrammes haben.

§. 53. Relationen für das harmonische Strahlenbüschel. — Alle Relationen für vier harmonische Punkte, welche sich auf eine solche Form bringen lassen, daß sie nur anharmonische Verhältnisse enthalten, lassen sich auf vier harmonische Gerade anwenden, wenn man für die Segmente die Sinusse der entsprechenden Winkel setzt. —

So kann man z. B. die erste der Gleichungen (2) in §. 37 wie folgt schreiben:

$$\frac{aa'}{ea'} : \frac{af}{ef} = 2,$$

und folglich hat man:

$$\frac{\sin(A,A')}{\sin(E,A')} : \frac{\sin(A,F)}{\sin(E,F)} = 2,$$

oder:

$$\sin(A,A')\sin(E,F) = 2\sin(A,F)\sin(E,A').$$

Ferner gibt die Gleichung (4) in §. 39 mit einem willkürlichen Punkte m die folgende mit einer willkürlichen Geraden M:

$$2\frac{\sin(M,A')}{\sin(A,A')} = \frac{\sin(M,E)}{\sin(A,E)} + \frac{\sin(M,F)}{\sin(A,F)},$$

und ebenso hat man:

$$2\frac{\sin(M,F)}{\sin(E,F)} = \frac{\sin(M,A)}{\sin(E,A)} + \frac{\sin(M,A')}{\sin(F,A')}.$$

Wenn die Gerade M auf E senkrecht ist, so hat man:

$$\frac{2}{tang(E,F)} = \frac{1}{tang(E,A)} + \frac{1}{tang(E,A')},$$

oder:

$$2\,cotg(E,F) = cotg(E,A) + cotg(E,A').$$

Die Gleichung (19) gibt folgende:

$$\frac{\sin(M,A)\sin(M,A')}{\sin(N,A)\sin(N,A')} + \frac{\sin(M,E)\sin(M,F)}{\sin(N,E)\sin(N,F)} = 2\frac{\sin(M,\alpha)\sin(M,O)}{\sin(N,\alpha)\sin(N,O)},$$

worin M,N zwei willkürliche Gerade und α,O die harmonisch conjugirten Geraden von N in Beziehung auf A,A' und E,F sind.

Wenn die beiden Geraden M,N auf einander senkrecht sind, so ist:

$$cotg(N,A)cotg(N,A')+cotg(N,E)cotg(N,F) = 2\,cotg(N,\alpha)cotg(N,O)$$

Endlich gibt die Gleichung (20) folgende:

$$\frac{\sin(M,A)\sin(M,A')}{\sin(N,A)\sin(N,A')}\sin(E,F)\sin(N,\alpha) + \frac{\sin^2(M,E)}{\sin^2(N,E)}\sin(F,\alpha)\sin(N,E) + \frac{\sin^2(M,E)}{\sin^2(N,F)}\sin(\alpha,E)\sin(N,F) = 0.$$

M,N sind zwei willkürliche Gerade, und α ist die harmonisch conjugirte Gerade von N in Bezug auf A,A'. —

Wenn die beiden Geraden M,N auf einander senkrecht sind, so ist:

$$cotg(N,A)cotg(N,A')sin(E,F)sin(N,\alpha)+cotg^2(N,E)sin(F,\alpha)sin(N,E) + cotg^2(N,E)\,sin(\alpha,E)\,sin(N,F)=0.$$

§. 54. Gleichzeitige Bestimmung zweier Punkte auf derselben Geraden. — Imaginäre Punkte. — Zwei Punkte werden auf einer Geraden gleichzeitig bestimmt, wenn man ihre Mitte und das Produkt oder Rechteck ihrer Abstände von einem auf derselben Geraden genommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkte kennt. —

Es seien a, a' die beiden Punkte, α ihre Mitte und v das Produkt ihrer Abstände von dem festen Punkte M; so ist nach §. 3:

$$v = Ma \,.\, Ma' = (M\alpha)^2 - (\alpha a)^2,$$

folglich:

$$(\alpha a)^2 = (M\alpha)^2 - v,\ \alpha a = \sqrt{(M\alpha)^2 - v}.$$

Die Bestimmung der beiden Punkte ist also von der Construction des Ausdruckes:

$$\sqrt{(M\alpha)^2 - v}$$

abhängig, und die Abstände der beiden Punkte von dem gemeinschaftlichen Anfangpunkte M sind:

$$Ma = M\alpha + \sqrt{(M\alpha)^2 - v},$$
$$Ma' = M\alpha - \sqrt{(M\alpha)^2 - v}.$$

Man kann also sagen: daß zwei Punkte durch einen Punkt, nämlich ihre Mitte, und durch das Rechteck oder das Produkt ihrer Abstände von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte ausgedrückt oder dargestellt werden. Wenn das Rechteck v negativ ist, so ist der Ausdruck $\sqrt{(M\alpha)^2 - v}$ stets reell und die Bestimmung der beiden Punkte immer möglich. Aber wenn v positiv ist, so muß $(M\alpha)^2 > v$ sein, wenn der fragliche Ausdruck reell sein soll.

Ist $(Ma)^2 < v$, so ist dieser Ausdruck imaginär, die beiden gesuchten Punkte existiren nicht mehr, und man sagt alsdann: daß sie imaginär sind. —

Wir wollen ein solches System von zwei Punkten, welche gleichzeitig durch zwei Elemente, nämlich durch ihre Mitte und durch das Produkt oder Rechteck ihrer Abstände von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte, bestimmt werden, conjugirte Punkte nennen.

Wenn man die beiden Elemente α, v durch eine Gleichung des zweiten Grades verbindet, worin nur eine Unbekannte vorkommt; so kann man die beiden Punkte durch diese Gleichung darstellen. Denn man hat:

$$Ma + Ma' = 2M\alpha, \; Ma \,.\, Ma' = v;$$

folglich:

$$Ma\,(2M\alpha - Ma) = v,$$

oder:

$$(Ma)^2 - 2M\alpha \,.\, Ma + v = 0,$$

und wenn man $Ma = x$ setzt:

$$x^2 - 2M\alpha + v = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind mithin die Abstände der beiden Punkte a, a' von dem Anfangspunkte M, und wenn diese Wurzeln imaginär sind; so sagt man: die beiden Punkte sind imaginär. —

Hieraus sieht man, was wir unter zwei imaginären Punkten verstehen, und wenn von zwei solchen Punkten die Rede sein wird, so werden darunter immer zwei auf die vorhin angegebene Weise bestimmte conjugirte Punkte verstanden, welche vermittelst ihrer beiden Elemente α, v mit einer gegebenen Figur in gewissen Beziehungen stehen können — und es handelt sich alsdann niemals um zwei beliebige voneinander unabhängige Punkte, wie z. B. zwei Punkte, welche zwei verschiedenen Systemen conjugirter Punkte angehören. —

§. 55. Das Produkt der Entfernungen zweier imaginären Punkte von einem reellen Punkte auf derselben Geraden ist reell und positiv.

Die beiden imaginären Punkte werden durch ihre Mitte α und durch das Produkt v ihrer Entfernungen von einem gemeinſchaftlichen Anfangspunkte m beſtimmt, und dieſe Entfernungen ſind nach §. 54:

$$ma = m\alpha + \sqrt{(m\alpha)^2 - v},$$

$$ma' = m\alpha - \sqrt{(m\alpha)^2 - v}.$$

Nimmt man einen andern Punkt M zum Anfangspunkt, ſo iſt:

$$ma = Ma - Mm,$$
$$ma' = Ma' - Mm;$$

alſo:

$$ma \,.\, ma' = Ma \,.\, Ma' - (Ma + Ma')\, Mm + (Mm)^2.$$

Nun iſt aber:

$$ma \,.\, ma' = v,\ Ma + Ma' = 2M\alpha;$$

folglich:

$$(\mu) \quad Ma \,.\, Ma' = 2M\alpha \,.\, Mm + v - (Mm)^2.$$

Alſo iſt das Produkt $Ma \,.\, Ma'$ immer reell*) und es iſt zugleich ſtets poſitiv; denn man kann ſetzen:

---

*) Dieſer Beweis iſt offenbar illuſoriſch; denn erſtens iſt nicht bewieſen, daß die Mitte α der beiden imaginären Punkte a, a' ein reeller Punkt, alſo $M\alpha$ reell iſt — und zweitens kommt v, deſſen Realität bewieſen werden ſollte, ſelbſt noch in dem Ausdrucke (μ) vor. — Der größte Mangel dieſer Anſicht beſteht aber darin: daß man über die Lage der beiden imaginären Punkte a, a' nichts erfährt — und es iſt ganz unrichtig, zu ſagen: die beiden Punkte a, a' exiſtiren nicht mehr, wenn v poſitiv und $> (m\alpha)^2$ iſt — auf der urſprünglichen Richtung allerdings nicht, wohl aber entſprechen den beiden imaginären Ausdrücken:

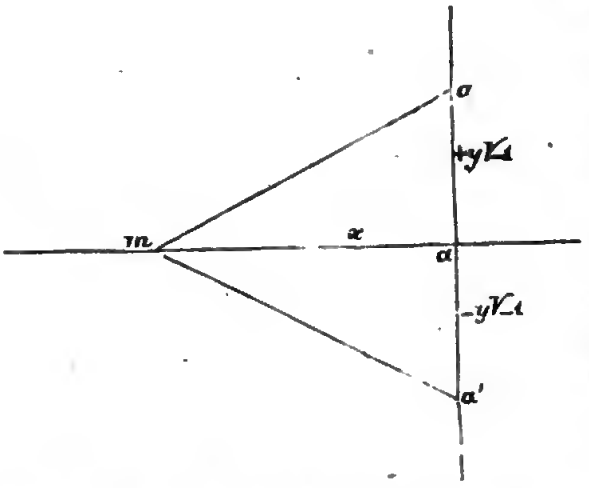
$$ma = m\alpha + (\sqrt{v - (m\alpha)^2})\sqrt{-1},$$
$$ma' = m\alpha - (\sqrt{v - (m\alpha)^2})\sqrt{-1}$$

zwei ganz beſtimmte Punkte der Ebene, welche auf dem in der Entfernung $m\alpha$ von dem Anfangspunkte m auf der urſprünglichen Richtung gezogenen Perpendikel in den Abſtänden $\pm\sqrt{v - (m\alpha)^2}$ von dieſer urſprünglichen Richtung oder der ſtets darauf liegenden reellen

$$Ma \,.\, Ma' = (M\alpha)^2 - (M\alpha - Mm)^2 + v,$$

und wegen $M\alpha - Mm = m\alpha$ ist mithin:

$$Ma \,.\, Ma' = (M\alpha)^2 - [(m\alpha)^2 - v].$$



Mitte α liegen, wie solches unmittelbar aus der allein objektiv richtigen Gauß'schen Theorie der imaginären oder complexen Größen folgt. (Vergl. Grundlehren der höhern Analysis, S. 244 folg. oder Theorie der höhern Gleichungen, S. 15 folg.)

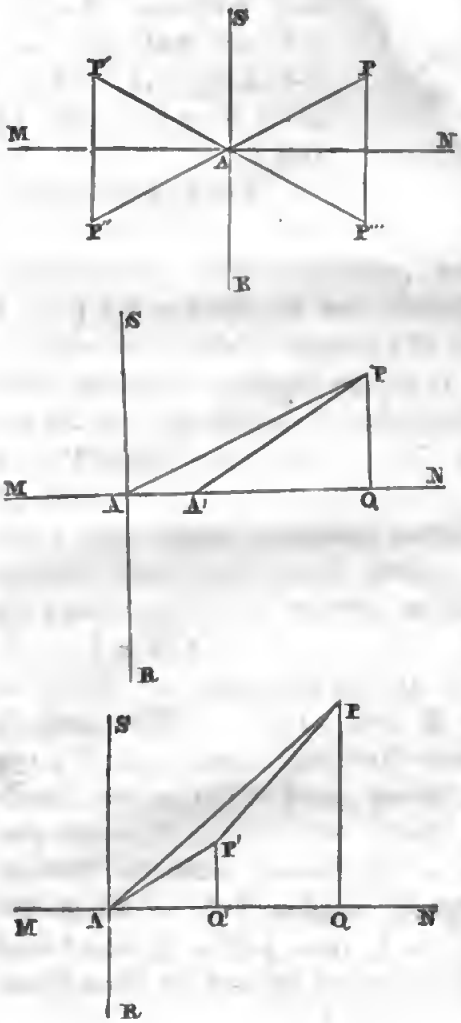
Wenn man nämlich für die Abstände zweier zusammengehöriger Punkte von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte unter gewissen Voraussetzungen Ausdrückd von der Form $x \pm y\sqrt{-1}$ erhält, so liegen diese Punkte nach der Gauß'schen Ansicht nicht mehr in der ursprünglichen Richtung, sondern in andern Punkten der Ebene, deren Coordinaten in Bezug auf den ursprünglichen Anfangspunkt und die ursprüngliche Richtung x, y und $x, -y$ sind, so daß das Zeichen $\sqrt{-1}$ blos andeutet: daß die Länge oder Strecke, bei der es steht, in einer auf der ursprünglichen senkrechten Richtung genommen werden muß, gerade so, wie die Zeichen $\pm$ angeben, in welchem Sinne eine damit behaftete Länge auf der ursprünglichen Richtung zu nehmen ist. — Die Lage der Punkte a, a' wird also durch die Ausdrücke $ma = x + y\sqrt{-1}$, $ma' = x - y\sqrt{-1}$ vollständig bestimmt, und die Mitte α zweier imaginärer Punkte a, a' ist stets reell. — Aber auch die Geraden ma, ma' werden durch diese Ausdrücke sowohl nach Länge als Richtung dargestellt; denn sie können construirt werden, sobald diese Ausdrücke gegeben sind — ganz ebenso, wie reelle Segmente oder Längen bestimmt sind und construirt werden können, wenn die Abstände ihrer Endpunkte von einem Anfangspunkte gegeben sind. — Es ist also das Produkt $ma \,.\, ma' = (x + y\sqrt{-1})\,(x - y\sqrt{-1}) = x^2 + y^2$ stets reell und positiv. — Ueberhaupt ergeben sich aus der Gauß'schen Theorie der imaginären Größen die Eigenthümlichkeiten derselben gleich-

Nach der Vorausſetzung iſt aber $[(m\alpha)^2 - v]$ negativ, weil die beiden Punkte imaginär ſind, und folglich iſt $Ma \,.\, Ma'$ poſitiv. W. b. w. f.

Der Beweis vereinfacht ſich, wenn man die beiden imaginären Punkte durch die Gleichung des zweiten Grades:

$$(\mu) \qquad x^2 + ax + b = 0$$

ſam von ſelbſt, was der beſte Beweis für die objektive Wahrheit dieſer Theorie iſt — und wir wollen deshalb in geometriſcher Beziehung hier noch einige Folgerungen daraus anführen, welche ſpäter von Nutzen ſein können. —



1) Die von dem Anfangspunkte A ausgehenden vier Geraden AP, AP', AP'', AP''' werden offenbar reſp. durch $x+y\sqrt{-1}$, $x+y\sqrt{-1}$, $-x-y\sqrt{-1}$, $x-y\sqrt{-1}$ ausgedrückt. — 2) Die Gerade $A'P$, deren Endpunkte durch $AA' = x'$, und $AQ = x$, $QP = y$ beſtimmt werden, wird durch $(x-x') + y\sqrt{-1}$ ausgedrückt, weil $AP = AA' + A'P$ iſt, ſobald nicht die Länge einer Geraden allein, ſondern auch ihre Richtung in Rechnung gebracht wird; alſo $A'P = AP - AA'$, d. h. $(x-x') + y\sqrt{-1}$. — 3) Die von den beiden Punkten P' oder $x'+y'\sqrt{-1}$ und P oder $x+y\sqrt{-1}$ begrenzte Gerade $P'P$ wird durch $(x-x') + (y-y')\sqrt{-1}$ ausgedrückt, weil $AP = AP' + P'P$, alſo $P'P = AP - AP' = (x+y\sqrt{-1}) - (x'+y'\sqrt{-1}) = (x-x') + (y-y')\sqrt{-1}$ iſt. — 4) Zwei conjugirte Gerade $P'P$ oder $(x-x') + (y-y')\sqrt{-1}$ und $P_1'P_1$ oder $(x-x') - (y+y')\sqrt{-1}$

darstellt, deren Wurzeln die Entfernungen der beiden Punkte von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte m sind.

Setzt man nämlich $x' + \Delta$ für x, so hat man die Gleichung:

$$x'^2 + (2\Delta + a)x' + \Delta^2 + a\Delta + b = 0,$$

deren Wurzeln die Entfernungen der beiden Punkte von einem andern Anfangspunkte M, welcher durch den Werth von Δ bestimmt wird, ausdrücken. Das Produkt dieser Entfernungen wird durch die stets reelle und positive Größe:

$$(\Delta^2 + a\Delta + b)$$

ausgedrückt; denn diese Größe kann auf die Form:

$$\left(\Delta + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)$$

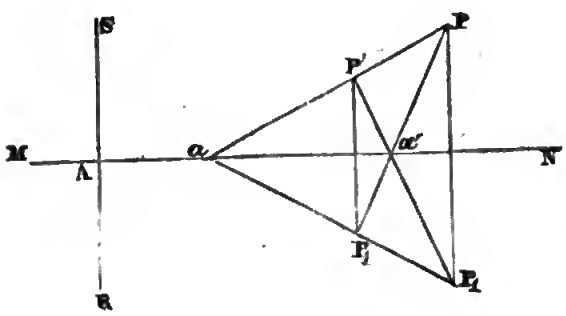
gebracht werden, und die Wurzeln der Gleichung (μ) sind nach der Voraussetzung imaginär, nämlich:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

also $\frac{a^2}{4} - b$ negativ, und mithin $b - \frac{a^2}{4}$ positiv. W. b. w. f.

§. 56. Relationen zwischen reellen und imaginären Punkten. — Zwei imaginäre Punkte können mit verschiedenen Theilen einer Figur, z. B. mit reellen Punkten, reelle Beziehungen haben, indem die imaginären Punkte implicite durch ihre beiden Elemente dargestellt werden. —

Gesetzt man habe in einer Figur zwischen drei in gerader Li-



schneiden sich stets in einem reellen Punkte α, so wie die Geraden $P'P_1$, PP'_1 in dem reellen Punkte α'; aber die Geraden $P'P$ und $P'P_1$ sowie P'_1P und P'_1P_1 schneiden sich in imaginären Punkten ꝛc. ꝛc.

nie liegenden Punkten e, f, α, der Mitte O der beiden erſten und einem andern Punkte m derſelben Geraden die Relation gefunden:

$$me \cdot mf + v = 2\, m\alpha \cdot mO,$$

wo v ein von der Figur abhängiges Rechteck oder Produkt zweier Linien iſt; ſo kann man dieſes Rechteck und den Punkt α als die Elemente der beiden reellen, oder imaginären Punkte a, a' betrachten, indem α ihre Mitte und v das Rechteck oder Produkt ihrer Abſtände vom Punkte m iſt. — Man kann alſo die Gleichung anſetzen:

$$me \cdot mf + ma \cdot ma' = 2m\alpha \cdot mO,$$

welche eine Eigenſchaft der Figur in Beziehung auf die beiden durch die beiden Elemente α und v beſtimmten Punkte ausdrückt. —

Wenn die beiden Punkte reell ſind, ſo kann man ſie für das Rechteck v in dem Ausdruck des durch die Gleichung ausgedrückten Satzes ſetzen, und wenn ſie imaginär ſind; ſo kann man dieſes Rechteck in dieſem Ausdrucke beibehalten, oder den Begriff der beiden imaginären Punkte in der oben angegebenen Bedeutung einführen. *) —

§. 57. Die Eigenſchaft, welche die vorhin als Beiſpiel genommene Gleichung ausdrückt, beſteht darin: daß die beiden Punkte a, a' deren Mitte der Punkt α iſt, in Bezug auf e, f harmoniſch conjugirt ſind. (§. 42). Man kann ſich alſo zwei, in Bezug auf zwei reelle Punkte harmoniſch conjugirte imaginäre Punkte denken; d. h. die beiden reellen Punkte haben zu den Elementen, welche das Syſtem der beiden imaginären Punkte ausdrücken, die Relationen, welche im Allgemeinen das harmoniſche Verhältniß von vier reellen, paarweiſe conjugirten Punkten ausdrücken. —

In §. 54 haben wir geſehen: daß, wenn die beiden imaginären Punkte, ſowie die Mitte zweier andern Punkte gegeben ſind, letztere immer conſtruirt werden können, und folglich reell

*) Wenn aber die imaginären Punkte nicht exiſtiren, wie S. 39 ausdrücklich geſagt wurde, ſo kann auch von ihren Entfernungen von reellen Punkten keine Rede ſein. —

sind. — Wenn also zwei Paare von Punkten a, a' und e, f in harmonischer Proportion sind, so kann blos das eine Paar imaginär sein, und das andere ist stets reell. —

Wenn das System der beiden imaginären Punkte, so wie der eine e der beiden reellen Punkte gegeben ist; so wird der zweite f durch die Relation:

$$.ea.ea' = ea.cf$$

bestimmt, worin die beiden imaginären Punkte mittelst ihrer beiden Elemente, nämlich ihrer Mitte α und des Rechteckes $ea.ea'$ ihrer Entfernungen vom Punkte e vorkommen (§. 45).

§. 58. Wenn zwei Paare von Punkten durch zwei Gleichungen des zweiten Grades:

$$x^2 + ax + b = 0,$$
$$x^2 + a'x + b' = 0$$

ausgedrückt werden, so lassen sich die zwischen diesen Punkten stattfindenden Relationen durch die Coefficianten a, b, a', b', welche den beiden Elementen jedes Punktepaares gleichgelten, ausdrücken. — So wird z. B. die harmonische Relation durch die Gleichung:

$$b + b' - \frac{aa'}{2} = 0$$

ausgedrückt, welche gleichbedeutend ist mit:

$$v + v' = 2m\alpha . m\alpha',$$

wo α, α' die Mitten der beiden Punktepaare und v, v' die Produkte ihrer Entfernungen von dem Anfangspunkte m sind. (§. 42 Gl. (7)).

§. 59. Obgleich man die harmonische Relation von vier Punkten durch eine Bedingungsgleichung zwischen den Elementen der beiden Punktepaare ausdrücken kann, so findet dasselbe doch nicht bei dem anharmonischen Verhältnisse statt — und der Grund davon liegt darin: daß bei der ersten Relation die beiden Punkte jedes Paares symmetrisch vorkommen, sowohl als in jedem ihrer Elemente, so daß man jeden Punkt mit seinem conjugirten vertauschen kann, und umgekehrt. —

Wenn man ausdrücken könnte, daß das anharmonische Verhältniß $\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f}$ der beiden Punktepaare a, a' und e, f gleich λ ist, und zwar durch eine Relation zwischen λ und den vier Elementen der beiden Punktepaare; so würde aus dieser Relation nicht hervorgehen: in welcher Ordnung die beiden Punkte a, a', so wie e, f genommen werden müssen, so daß man nicht wüßte, ob $\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f}$ oder $\frac{af}{ae} : \frac{a'f}{a'e}$ das anharmonische Verhältniß ist.

§. 60. Andere Elemente, durch welche man zwei imaginäre Punkte bestimmen kann. — Den in Beziehung auf zwei reelle, oder imaginäre Punkte a, a' harmonisch conjugirten Punkt f eines Punktes e kann man construiren (§. 57). Dieser Punkt, welcher auch der Mittelpunkt der harmonischen Mittel der beiden Punkte a, a' in Bezug auf den gegebenen Punkt e genannt wird (§. 38), ist, sowohl als der Mittelpunkt der beiden Punkte a, a' und das Produkt ihrer Entfernung von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte, immer reell. Von diesen drei Elementen sind zwei zur Bestimmung des dritten, und folglich zur Bestimmung der beiden Punkte hinreichend. Denn bezeichnet man das Produkt $ma \,.\, ma'$ mit v, so wird die Gleichung (7) in §. 42):

$$v + me \,.\, mf = ma\,(me + mf),$$

eine Relation zwischen den beiden Elementen a, v der beiden reellen, oder imaginären Punkte a, a' und ihrem Mittelpunkte der harmonischen Mittel f in Beziehung auf den Punkt e. —

Man könnte also zur Bestimmung zweier conjugirter Punkte, die imaginär werden können, andere Elemente nehmen, als die Mitte und das Rechteck, welche wir gewählt haben, weil diese Elemente bei geometrischen Untersuchungen am häufigsten vorkommen, und in der Gleichung des zweiten Grades, welche zur Darstellung der beiden Punkte genügt, explicite erscheinen.

Im Allgemeinen kann man jede geometrische Relation nehmen, welche auf eine Gleichung des zweiten Grades führt. Hat man z. B. auf einer Geraden vier feste Punkte A, A', B, B', so bestimmt man die Lage zweier Punkte a, a', wenn man ausdrückt: daß das Verhältniß der Produkte der Entfernungen eines jeden von den

Punktepaaren A, A' und B, B' einen bestimmten Werth hat, d. h. daß man hat:

$$\frac{Aa \,.\, A'a}{Ba \,.\, B'a} = \frac{Aa' \,.\, A'a'}{Ba' \,.\, B'a'} = \lambda,$$

u. d. m. — Auch vermittelst des Durchschnittes einer Geraden und eines Kreises werden zwei conjugirte Punkte bestimmt, welche imaginär werden können, wie wir später sehen werden. —

§. 61. System zweier imaginärer Punkte, welche mit zwei reellen Punkten eine harmonische Relation bilden. — Die meisten der Relationen, welche wir von vier reellen Punkten bewiesen haben, die in harmonischer Proportion stehen, sind nicht mehr anwendbar, wenn zwei dieser Punkte imaginär werden, wie solches geschehen kann (§. 57). So hat z. B. die Relation:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f},$$

sowie die Relation:

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'},$$

und manche andere, keinen expliciten Sinn mehr, wenn die Punkte a, a' imaginär werden. —

Aber wenn man annimmt: daß man an imaginären Größen die Operationen der Addition, Multiplication, ꝛc. ebenso verrichten kann, wie an reellen Größen, so ergibt sich aus jeder dieser Gleichungen eine Relation, worin die beiden Punkte nur mittelst ihrer Elemente vorkommen, und diese Relation ist ein explicirter Ausdruck des harmonischen Verhältnisses zweier imaginärer Punkte a, a' zu zwei reellen Punkten e, f. So gibt z. B. die zweite der obigen Gleichungen:

$$\frac{2}{ef} = \frac{ea + ea'}{ea \,.\, ea'} = \frac{2ea}{ea \,.\, ea'},$$

oder:

$$ef \,.\, ea = ea' \,.\, ea',$$

eine Gleichung, worin nur die beiden Elemente der beiden ima-

ginären Punkte vorkommen; nämlich ihr Mittelpunkt α und das Rechteck $ea.ea'$ ihrer Abstände von dem Punkte e. —

Man kann also die zwischen zwei imaginären Punkten und reellen Theilen einer Figur stattfindende gegenseitige Abhängigkeit, worin im Grunde nur die Elemente der beiden imaginären Punkte vorkommen können, durch die allgemeinen Relationen ausdrücken, welche dem Falle reeller Punkte entsprechen, und worin diese Elemente nicht explicite vorkommen. — Aber alsdann müssen die Segmente, welche in diesen Relationen vorkommen, wie z. B. in:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f}$$

als Symbole betrachtet werden, vermittelst welcher man eine Andeutung des Falles gibt, wo die Punkte reell sind, und welche, wie in diesem speciellen Falle mit einander verbunden, zu Relationen führen, worin nur die Elemente der beiden imaginären Punkte vorkommen, so daß die ursprüngliche symbolische Relation im Grunde nur ein Ausdruck dieser Relation zwischen reellen Elementen ist. — Die Anwendung dieser symbolischen Relationen wird also erlaubt sein, so daß man in Bezug auf imaginäre Punkte ebenso schließen kann, wie in dem analogen Falle reeller Punkte*)

§. 62. Gleichzeitige Bestimmung zweier durch einen gegebenen Punkt gehender conjugirter Geraden. — Imaginäre Gerade. — Man kann die Lage zweier von einem gegebenen Punkte ausgehender Geraden durch die der beiden Punkte

---

*) Da nach der Gauß'schen Theorie des Imaginären die Abstände zwischen reellen und imaginären Punkten, so wie die zwischen imaginären Punkten einen ebenso bestimmten Begriff und Ausdruck darbieten, wie die zwischen reellen Punkten (§. 55), so folgt von selbst, daß dieses auch bei den Relationen:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f},$$

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'}, \text{ etc.}$$

der Fall ist, diese also keine blos symbolische Bedeutung haben, wenn

bestimmen, worin diese Geraden eine feste Gerade schneiden, und wenn diese beiden Punkte imaginär sind; so sagt man: daß die beiden Geraden selbst imaginär sind. —

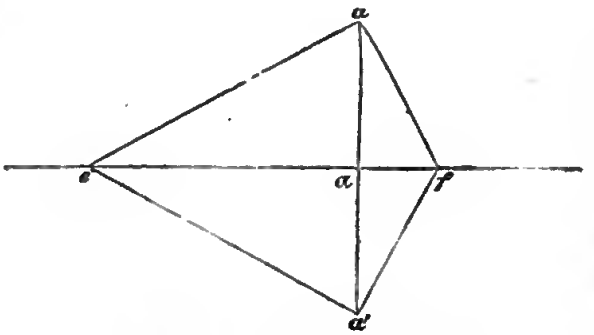
Man kann die Lage zweier Geraden auch direkt durch die Winkel bestimmen, welche sie mit einer durch ihren Durchschnittspunkt gehenden festen Axe bilden. Diese Winkel werden durch ihre Tangenten oder Cotangenten bestimmt, und die Lage der beiden Geraden ist bestimmt, wenn man das Produkt und die Summe der Cotangenten kennt. Es seien ω, ω' die beiden Winkel und S, P resp. die Summe und das Produkt der beiden Contangenten; so sind letztere die Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$cotg^2 x + S\, cotg\, x + P = 0,$$

oder:

$$cotg^2 x - (cotg\, \omega + cotg\, \omega')\, cotg\, x + cotg\, \omega \,.\, cotg\, \omega' = 0.$$

Die Summe der Cotangenten bestimmt die Lage einer Geraden, welche die harmonisch conjugirte der festen Axe in Bezug auf die



zwei conjugirte Punkte, etwa a, a', imaginär sind. — Setzt man in diese Relationen mit imaginären Segmenten für ae, af, $a'e$, $a'f$, aa' ihre Ausdrücke. (§. 55):

$$ae = ea + aa\sqrt{-1},\ af = -af + aa\sqrt{-1},$$

$$a'e = ca - aa\sqrt{-1},\ a'f = -af - aa\sqrt{-1},\ aa' = 2aa\sqrt{-1}$$

und reducirt gehörig; so erhält man in der That die frühern Relationen mit reellen Segmenten und Elementen wieder. —

Offenbar kann man die Lage der beiden imaginären Punkte a, a' nicht bestimmen, wenn blos die beiden reellen Punkte e, f gegeben sind; sobald aber noch eins der beiden Elemente α oder v, d. h. ea oder $ea.ea'$ gegeben ist; so ist ihre Lage vollständig bestimmt. — Ist α gegeben, so hat man:

$$aa = -aa' = \pm (\sqrt{ae \,.\, af})\sqrt{-1} = \pm (\sqrt{(Oe)^2 - (O\alpha)^2})\sqrt{-1},$$

und wenn $v = ea \,.\, ea'$ gegeben ist, so hat man:

$$ea = \frac{ea \,.\, ea'}{ef}.$$

beiden geſuchten Geraden A, A' iſt. Denn bedeutet F dieſe conjugirte Gerade und E die feſte Axe; ſo hat man:

$$2\,cotg\,(E,F) = cotg\,(E,A) + cotg\,(E,A'),\ (\S.\ 53)$$

oder:

$$2\,cotg\,(E,F) = cotg\,\omega + cotg\,\omega'.$$

Man kann alſo ſagen: daß zwei Gerade gleichzeitig beſtimmt werden, wenn man das Produkt der Cotangenten ihrer Neigungen gegen eine feſte Axe und die in Beziehung auf die beiden gefuchten Geraden harmoniſch conjugirte Gerade dieſer Axe kennt. — Dieſe Gerade und das Produkt der Cotangenten der Neigungen können als die zur Beſtimmung der beiden Geraden geeigneten Elemente betrachtet werden. — Die beiden Geraden können ungeachtet der Realität der beiden Elemente imaginär ſein. — Was wir weiter oben über Syſteme imaginärer Punkte und deren Beziehungen zu andern reellen Theilen einer Figur geſagt haben, iſt ohne Weiteres auf Syſteme imaginärer Geraden anwendbar, ſo daß wir auf dieſen Gegenſtand hier nicht weiter einzugehen brauchen. — *)

Theorie der homographiſchen Theilung.

§. 63. Homographiſche Theilung zweier Geraden. — Wenn zwei Gerade ſo getheilt ſind, daß das anharmoniſche Verhältniß von vier beliebigen Theilungspunkten der einen dem der vier entſprechenden Theilungspunkte der andern gleich iſt; ſo werden wir ſagen: daß dieſe beiden Geraden homographiſch getheilt ſind — oder: daß die Theilungspunkte zwei homographiſche Theilungen bilden. — Wir werden ſehen, daß ſich homographiſche Theilungen auf unendlich viele Arten machen laſſen.

Homographiſche Büſchel. — Wenn zwei Strahlenbüſchel ſo beſchaffen ſind, daß das anharmoniſche Verhältniß von vier beliebigen Strahlen des erſten Büſchels dem der vier entſprechenden

*) Es ſind in Bezug auf imaginäre Gerade ähnliche Bemerkungen zu machen, wie in §§. 55 und 61 in Beziehung auf imaginäre Punkte gemacht ſind. — Findet man z. B. für die Tangente des Winkels, welchen eine Gerade mit der feſten Axe E bildet, einen imaginären Werth $= q\sqrt{-1}$, ſo wird dadurch angezeigt: daß die fragliche Gerade nicht mehr in der urſprünglichen Ebene, ſondern in einer durch die feſte Axe gehenden, darauf ſenkrechten Ebene liegt, und mit dieſer Axe einen Winkel bildet, deſſen Tangente $= q$ iſt. — U. ſ. w.

Strahlen des zweiten gleich iſt; ſo nennen wir dieſe Büſchel homographiſche. —

§. 64. Conſtruction zweier homographiſchen Theilungen. — Wenn eine Gerade L in den Punkten $a, b, c, d, e, \ldots$ getheilt iſt, und man will eine zweite Gerade L' homographiſch theilen; ſo kann man auf dieſer drei Punkte a', b', c' beliebig annehmen, welche den drei Punkten a, b, c der erſten Geraden entſprechen, und die den übrigen Punkten $d, e, \ldots$ entſprechenden Punkte $d' e', \ldots$ durch die Bedingung beſtimmen: daß das anharmoniſche Verhältniß der Punkte a', b', c', d'; ꝛc. dem der Punkte a, b, c, d; ꝛc. gleich iſt, ſo daß man hat:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'}, \text{ etc. (§. 9).}$$

Denn wenn man die Gerade L' ſo legt, daß ſie mit L einen beliebigen Winkel bildet, und der Punkt a' mit a zuſammenfällt; ſo gehen die Geraden $bb', cc', dd', \ldots$ alle durch denſelben Punkt S (§. 25); folglich iſt nach §. 12 das anharmoniſche Verhältniß von irgend vier der Punkte $a', b', c', d', e', \ldots$ dem der vier entſprechenden der Punkte $a, b, c, d, e, \ldots$ gleich, und mithin ſind die beiden Geraden homographiſch getheilt. —

Oder: Man beſtimmt nach der Vorausſetzung die Punkte d', $e', f', \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'},$$
$$\frac{ab}{ac} : \frac{eb}{ec} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{e'b'}{e'c'},$$
$$\ldots = \ldots$$

Dividirt man die beiden erſten Gleichheiten in einander, um die Punkte a, a' zu eliminiren; ſo erhält man die Gleichheit:

$$\frac{db}{dc} : \frac{eb}{ec} = \frac{d'b'}{d'c'} : \frac{e'b'}{e'c'},$$

welche zeigt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte b, c, d, e dem der vier Punkte b', c', d', e' gleich iſt. —

Ebenſo haben die beiden Syſteme b, c, d, f und b', c', d', f' gleiche anharmoniſche Verhältniſſe, ſo daß f und f' reſp. mit b, c, d und b', c', d' ſowohl als e und e' zwei gleiche anharmoniſche Verhältniſſe bilden — und aus dem, was eben in Bezug auf die

Punkte d,e und d',e' bewieſen iſt, folgt: daß die beiden Syſteme c,d,e,f und c',d',e',f' gleiche anharmoniſche Verhältniſſe haben. — Daſſelbe gilt aber auch von den beiden Syſtemen c,d,e,g und c',d',e',g', und mithin haben die beiden Syſteme d,e,f,g und d',e',f',g' auch gleiche anharmoniſche Verhältniſſe. — Ebenſo haben die beiden Syſteme d,e,f,h und d',e',f',h' gleiche anharmoniſche Verhältniſſe; folglich auch e,f,g,h und e',f',g',h'. — U. ſ. f. —

§. 65. Conſtruction zweier homographiſcher Büſchel. — Um zu einem gegebenen Strahlenbüſchel $A,B,C,D,E\ldots$ ein zweites, homographiſches zu bilden, kann man drei Strahlen A',B',C' beliebig annehmen, welche A,B,C entſprechen, und dann einen vierten Strahl D' nach der Bedingung beſtimmen: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Strahlen A',B',C',D' dem der vier Strahlen A,B,C,D gleich iſt (§. 11), ꝛc.

Denn durchſchneidet man dieſe beiden Strahlenbüſchel mit zwei Transverſalen, ſo bilden die Durchſchnittspunkte $a,b,c,d,\ldots a',b',c',d',\ldots$ nach dem Obigen zwei homographiſche Theilungen, woraus folgt: daß die beiden Büſchel homographiſch ſind (§. 11.) —

Am einfachſten kann man zu einem gegebenen Büſchel ein homographiſches conſtruiren, wenn man daſſelbe mit einer Transverſale durchſchneidet, welche zu einem Strahle deſſelben, etwa D, parallel iſt. — Denn zwei homographiſche Büſchel $A,B,C,D,..;A',B',C',D',\ldots$ haben die Eigenſchaft: daß ſie zwei, zu zwei homologen Strahlen D,D' parallele Transverſalen einfach proportional theilen, weil alsdann die entſprechenden Theilungspunkte d,d' in unendlicher Entfernung liegen, alſo $\frac{db}{dc}=1$, $\frac{d'b'}{d'c'}=1,\ldots$ mithin:

$$\frac{ab}{ac}=\frac{a'b'}{a'c'},\ldots.$$

iſt.

§. 65a. Wenn zwei Theilungen auf zwei Geraden zu einer dritten Theilung homographiſch ſind, ſo ſind ſie auch homographiſch unter ſich. —

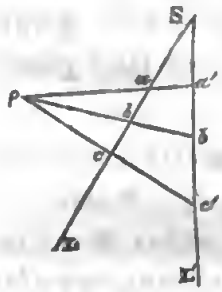
Denn das anharmoniſche Verhältniß von vier Punkten a'',b'',c'',d'' der dritten Theilung iſt ſowohl dem der vier entſprechenden Punkte a,b,c,d der erſten Theilung, als dem der vier ent-

sprechenden Punkte a', b', c', d' der zweiten Theilung gleich. Folglich ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d dem der vier Punkte a', b', c', d' gleich, und mithin sind die erste und zweite Theilung homographisch unter sich. —

Hieraus folgt: Wenn von mehrern Theilungen jede zwei aufeinanderfolgende homographisch sind, so sind auch zwei beliebige derselben homographisch. —

Offenbar gilt das eben von zwei homographischen Theilungen Gesagte auch von homographischen Büscheln. —

§. 66. Geometrische Eigenschaften zweier homographisch getheilter Geraden und zweier homographischer Strahlenbüschel. — Wenn von demselben Punkte ϱ ausgehende Gerade zwei feste Gerade SL, SL' in den Punkten $a, a'; b, b'; c, c'; \ldots$ schneiden, so theilen diese Punkte die beiden Geraden SL, SL' homographisch. — Denn das anharmonische Verhältniß von vier beliebigen Punkten a, b, c, d der ersten Geraden ist gleich dem der vier entsprechenden Punkte a', b', c', d' der zweiten (§. 12).

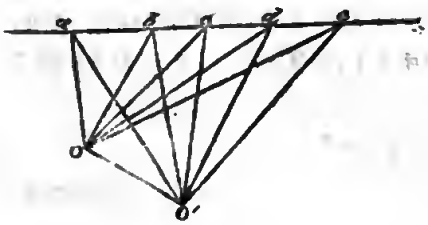


Offenbar ist der Durchschnittspunkt S der beiden Geraden SL, SL' gleichbedeutend mit zwei honologen Theilungspunkten — und soll deshalb ein gemeinschaftlicher Punkt beider Theilungen genannt werden. —

§. 67. Umgekehrt: Wenn zwei Gerade homographisch getheilt sind, und ihr Durchschnittspunkt ein gemeinschaftlicher Theilungspunkt ist, so gehen alle Geraden, welche je zwei homologe Theilungspunkte verbinden, durch denselben Punkt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus § 25.

§. 68. Wenn Strahlen von zwei festen Punkten O, O' ausgehen, und sich paarweise in Punkten $a, b, c, d \ldots$ schneiden, die in gerader Linie liegen; so bilden diese Strahlen zwei homographische Büschel. —



Denn da die vier Punkte $a, b,$

c, d in gerader Linie liegen, so ist ihr anharmonisches Verhältniß dem der von den Punkten O, O' ausgehenden Strahlen gleich; also haben diese beiden Büschel gleiche anharmonische Verhältnisse, und sind mithin homographisch (§. 63).

Offenbar stellt die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte O, O' der Strahlenbüschel zwei zusammenfallende homologe Strahlen dar, weshalb dieser Strahl OO' ein gemeinschaftlicher beider Büschel heißen soll. —

§. 69. Umgekehrt: Wenn zwei homographische Strahlenbüschel so liegen, daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ein gemeinschaftlicher Strahl ist; so schneiden sich die homologen Strahlen beider Büschel in Punkten, die in gerader Linie liegen. — Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 28.

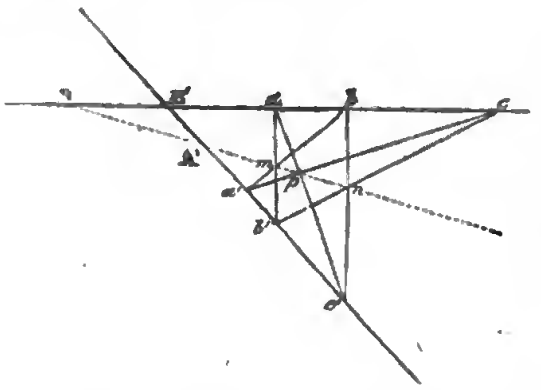
§. 70. Wenn zwei Gerade in den paarweise einander entsprechenden Punkten $a, b, c, \ldots$ und $a', b', c', \ldots$ homographisch getheilt sind, und man nimmt auf einer Verbindungslinie aa' zweier entsprechenden Theilungspunkte zwei beliebige feste Punkte P, P'; so schneiden die Geraden $Pb, Pc, \ldots$ resp. die Geraden $P'b', P'c', \ldots$ in Punkten $\beta, \gamma, \ldots$, welche in gerader Linie ligen. —

Denn diese letzten Geraden bilden zwei homographische Büschel, weil vier Strahlen des ersten Büschels dasselbe anharmonische Verhältniß haben, wie die vier entsprechenden Strahlen des zweiten; aber zwei Strahlen $Pa, P'a'$ fallen in dieselbe Richtung; folglich treffen die übrigen Strahlen des ersten Büschels die entsprechenden des zweiten in Punkten, welche in gerader Linie liegen (§. 69).

§. 71. Wenn zwei homographische Büschel gegeben sind, und man zieht durch den Durchschnittspunkt zweier homologer Strahlen zwei feste Transversalen, welche die beiden Büschel resp. in zwei Reihen von Punkten schneiden; so gehen die Geraden, welche die Durchschnittspunkte der ersten Transversale mit den entsprechenden der zweiten verbinden, durch denselben Punkt. —

Denn diese Punkte bilden zwei homographische Theilungen, worin der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen ein gemein-

ſchaftlicher Punkt iſt. Folglich gehen nach §. 67 die Geraden, welche die übrigen homologen Theilungspunkte paarweiſe verbinden, durch denſelben Punkt. —



§. 72. Wenn zwei Gerade in den Punkten $a, b, c, \ldots$ und $a', b', c', \ldots$ homographiſch getheilt ſind; ſo ſchneiden ſich je zwei Gerade, wie ab' und $a'b$ oder ac' und $a'c$, oder bc' und $b'c$ ꝛc. welche von zwei beliebigen Punkten der erſten Geraden nach den in umgekehrter Ordnung genommenen, entſprechenden beiden Punkten der zweiten gehen, auf einer feſten Geraden. —

Es bezeichne der doppelte Buchſtabe AB' den Durchſchnittspunkt der beiden Geraden, indem A der erſten und B' der zweiten angehört. Ferner ſei A' der entſprechende Punkt von A und B der von B'; ſo wollen wir beweiſen: daß der Durchſchnittspunkt zweier Geraden, wie ab' und $a'b$, ꝛc. auf der feſten Geraden $A'B$ liegt. — Denn da in beiden homographiſchen Theilungen die vier Punkte a, b, A, B den vier Punkten a', b', A', B' entſprechen, ſo iſt das anharmoniſche Verhältniß der erſten dem der letzten gleich, und folglich iſt auch das anharmoniſche Verhältniß der von dem Punkte a ausgehenden vier Geraden aa', ab', aA', aB' dem der von dem Punkte a' ausgehenden vier Geraden $a'a, a'b, a'A, a'B$ gleich. Dieſe beiden Büſchel haben ferner zwei nach aa' zuſammenfallende Strahlen, und folglich ſchneiden die drei andern Paare entſprechender Strahlen ſich in drei in gerader Linie liegenden Punkten (§. 69), nämlich m, A', B. Der Punkt m liegt alſo auf der Geraden $A'B$, und ebenſo wird bewieſen, daß die Durchſchnittspunkte $n, \ldots$ auf $A'B$ liegen. —

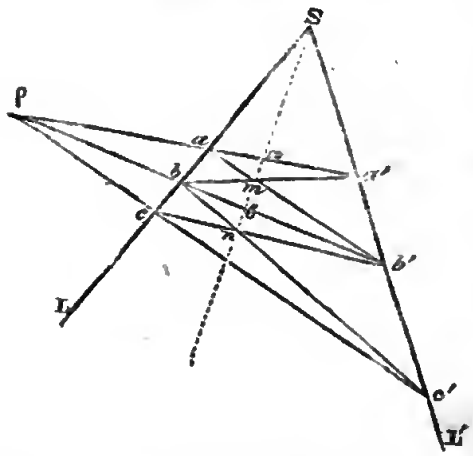
Da die den drei Punkten a, b, c entſprechenden drei Punkte a', b', c' beliebig angenommen werden können, ſo hat man auch den Satz:

Wenn auf zwei Geraden zwei Reihen von drei Punk-

ten a, b, c und a', b', c' die einander paarweise entsprechen, beliebig angenommen werden; so liegen die Durchschnittspunkte m, p, n der Diagonalen ab' und $a'b$, ac' und $a'c$, bc' und $b'c$ in gerader Linie. —

Da $ab'ca'bc'$ ein Sechseck ist, so kann man auch sagen: die Gegenseiten eines zwischen zwei Gerade beschriebenen Sechseckes schneiden sich in drei in gerader Linie liegenden Punkten m, p, n.

Wenn die Theilungspunkte $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$ auf den beiden Geraden L, L' durch Transversalen bestimmt werden, welche von demselben Punkte ϱ ausgehen; so geht die Gerade mn, welche der Ort der Durchschnittspunkte der Diagonalen der Vierecke $aa'bb'$, $bb'cc'$, ꝛc ist, offenbar durch den Durchschnittspunkt S der beiden Geraden L, L'.



Und die Gerade mn schneidet die Transversalen $\varrho aa'$, $\varrho bb'$, .. in Punkten α, β, ..., welche die harmonisch conjugirten des Punktes ϱ auf den Segmenten $aa', bb', \ldots$ sind, so daß man hat:

$$\frac{\varrho a}{\varrho a'} = -\frac{\alpha a}{\alpha a'}, \ldots.$$

Denn das anharmonische Verhältniß der vier Punkte ϱ, b, β, b' ist einerseits gleich dem der vier Punkte ϱ, a, α, a', weil die drei Geraden $ba, \beta\alpha, b'a'$ durch denselben Punkt S gehen, und andrerseits gleich dem der vier Punkte ϱ, a', α, a, weil die drei Geraden ba', $\beta\alpha, b'a$ durch denselben Punkt m gehen. Folglich ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte ϱ, a, α, a' dem der vier Punkte ϱ, a', α, a gleich, und man hat:

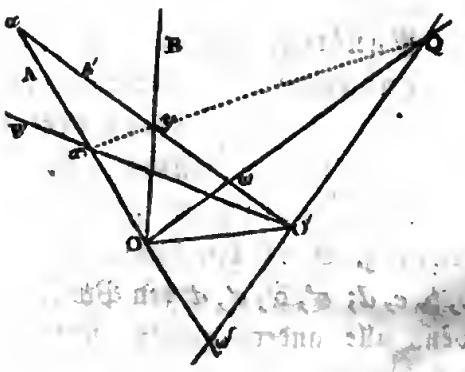
$$\frac{\varrho a}{\varrho \alpha} : \frac{a'a}{a'\alpha} = \frac{\varrho a'}{\varrho \alpha} : \frac{aa'}{a\alpha},$$

oder wegen $a'a = -aa'$:

$$\frac{\varrho a}{\varrho a'} : \frac{\alpha a}{\alpha a'} = -1.$$

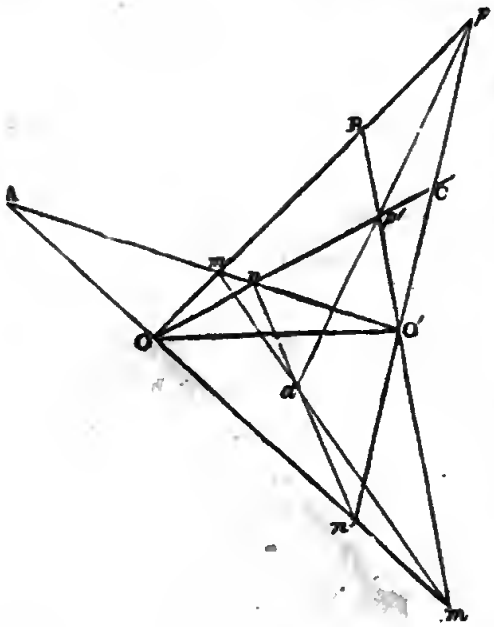
Die beiden Punkte ϱ, α sind also in Bezug auf a, a' harmonisch conjugirt.

§. 73. Wenn zwei homographische Büschel gegeben sind, und man nimmt in dem ersten zwei beliebige Strahlen A, B, so wie in dem zweiten zwei homologe Strahlen A', B'; so geht die Gerade, welche den Durchschnittspunkt x der beiden nicht homologen Strahlen A, B' mit dem Durchschnittspunkte y der beiden andern Strahlen B, A' verbindet, immer durch denselben Punkt, nämlich durch den Durchschnittspunkt Q der beiden Strahlen $OQ, O'Q$, wovon der erste in dem ersten Büschel der Geraden OO' in dem zweiten, und der zweite in dem zweiten Büschel der Geraden OO' in dem ersten Büschel entspricht. —



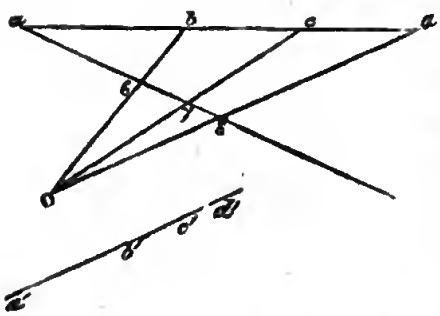
Denn die vier Strahlen OA, OB, OO', OQ des ersten Büschels geben dasselbe anharmonische Verhältniß, als die vier Strahlen $O'A', O'B', O'Q, O'O$ des zweiten Büschels, und wenn diese beiden Büschel resp. mit den Strahlen $O'A', OA$ durchschnitten werden; so erhält man zwei Reihen von Punkten α, y, O', ω und α, x, ω', O, deren anharmonische Verhältnisse gleich sind. — In diesen beiden Reihen ist aber der Punkt α gemeinschaftlich; folglich gehen die Verbindungslinien $xy, O'\omega', O\omega$ der drei andern Paare homologer Punkte durch denselben Punkt (§. 67). Nun ist aber Q der Durchschnittspunkt von $O\omega$ und $O'\omega'$; folglich geht die Gerade xy stets durch den Punkt Q. —

Da in dem zweiten Büschel drei Strahlen beliebig als entsprechende von drei Strahlen des ersten angenommen werden können, so hat man auch folgenden Satz:



Wenn drei Winkel A, B, C eine gemeinschaftliche Sehne OO' fassen, so fassen je zwei auch dieselbe Sehne, und die so bestimmten drei Sehnen mm', nn', pp' gehen durch denselben Punkt a. —

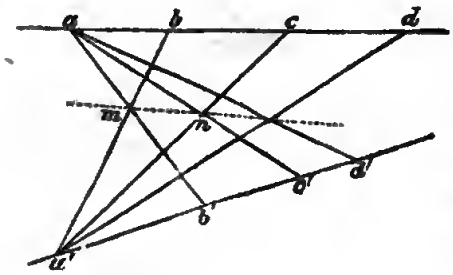
§. 74. Aufgabe. — In zwei Reihen von vier Punkten, welche gleiche anharmonische Verhältnisse haben, einen dieser Punkte zu finden, wenn alle übrigen gegeben sind; z. B. in den beiden Reihen a, b, c, d; a', b', c', d' den Punkt d', wenn alle andern gegeben sind, so daß man hat:



$$\frac{d'a'}{d'b'} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{ca}{cb} .$$

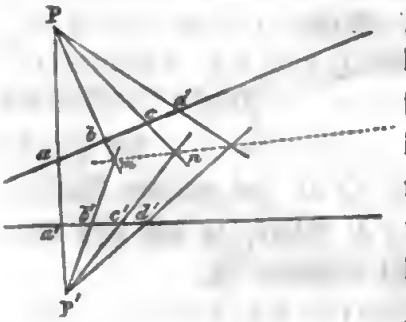
Erste Auflösung. — Durch den Punkt a ziehe man in einer beliebigen Richtung eine Gerade und nehme darauf $a\beta = a'b'$, $a\gamma = a'c'$. Ferner ziehe man die beiden Geraden $b\beta$, $c\gamma$ und durch ihren Durchschnittspunkt O die Gerade Od, welche die Hülfslinie $a\beta$ in einem Punkte δ schneidet. Endlich nehme man auf der Geraden $a'b'$ das Segment $a'd' = a\delta$, so ist d' der gesuchte Punkt. —

Diese Construction ist auch in dem Falle anwendbar, wo die Punkte a', b', c' mit a, b, c, d auf derselben Geraden gegeben sind. —

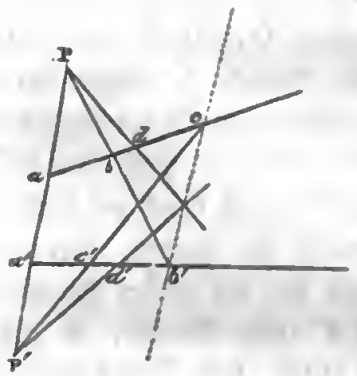


Zweite Auflösung. — Man ziehe die Geraden ab', ac', welche die Geraden $a'b$, $a'c$ resp. in den Punkten m, n schneiden, und die Geraden $a'd$, ad' schneiden sich auf der Geraden mn (§. 72); die Gerade ad' ist also bestimmt und gibt den Punkt d'. —

Dritte Auflösung. — Man nehme auf der Geraden aa' zwei beliebige Punkte P, P' und ziehe die Geraden Pb, Pc und $P'b', P'c'$; so schneiden die beiden ersten die beiden letzten resp. in den Punkten m, n und die beiden Geraden $Pd, P'd'$ müssen sich auf der Geraden mn schneiden (§. 70); folglich ist die Gerade $P'd'$ bestimmt, mithin auch der Punkt d'.

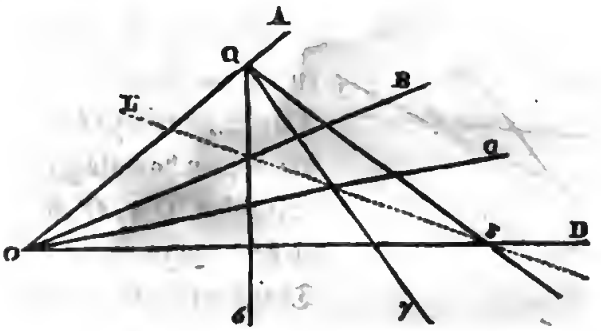


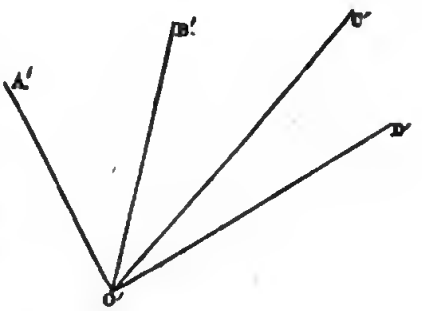
Die Construction vereinfacht sich, wenn man zu P, P' die Durchschnittspunkte von aa' mit bb' und cc' nimmt; denn alsdann müssen sich die Geraden $Pd, P'd$ auf der Geraden cb' schneiden.—



Bei jeder dieser Constructionen kann auf jeder Geraden einer der gegebenen Punkte in unendlicher Entfernung angenommen werden. —

§. 75. Aufgabe. — In zwei Strahlenbüscheln OA, OB, OC, OD und $O'A', O'B', O'C', O'D'$,

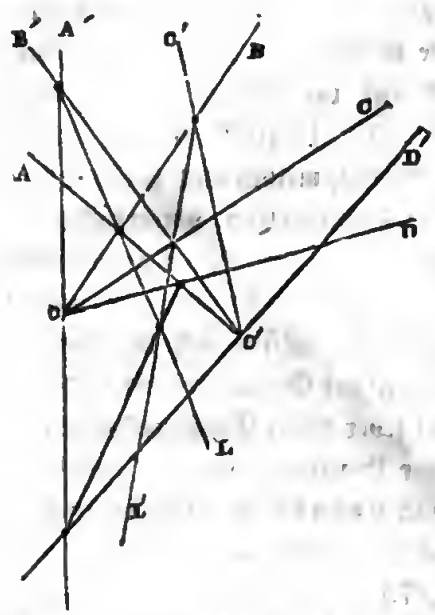




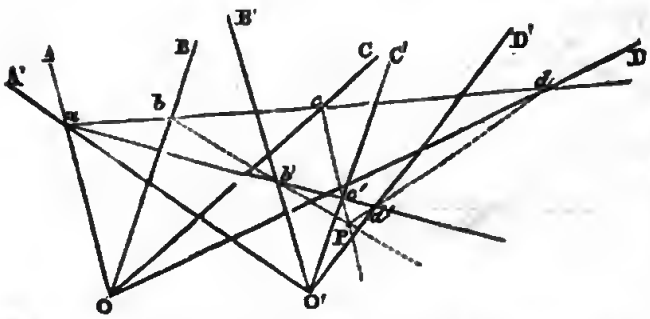
welche gleiche anharmonische Verhältnisse haben, den vierten Strahl $O'D'$ des zweiten Büschels zu bestimmen, wenn alle übrigen Strahlen bekannt sind. —

Erste Auflösung. — Man lege das zweite Strahlenbüschel so, daß sein Mittelpunkt O' mit einem Punkte Q des Strahles OA des ersten Büschels und sein Strahl $O'A'$ mit OA zusammenfällt; d. h. durch den Punkt Q ziehe man zwei Gerade $Q\mathfrak{B}, Q\gamma$, welche mit QA Winkel bilden, die resp. den Winkeln $B'O'A', C'O'A'$ gleich

sind, dann ziehe man durch die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den beiden Strahlen OB, OC eine Gerade L, und endlich durch den Durchschnittspunkt δ dieser Geraden L und des Strahles OD die Gerade $Q\delta$; so bildet diese mit QO einen Winkel, welcher dem Winkel gleich ist, den der gesuchte Strahl $O'D'$ des zweiten Büschels mit $O'A'$ bildet, so daß also dieser Strahl bestimmt ist.

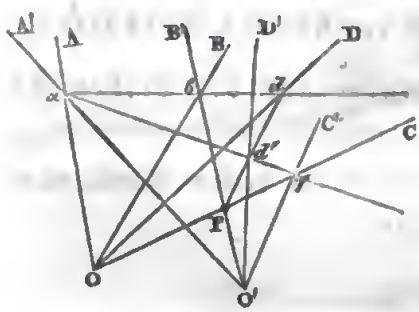


Zweite Auflösung. — Man ziehe durch die Durchschnittspunkte der Strahlen $OA, O'B'$ und $OB, O'A'$ eine Gerade L, sowie durch die Durchschnittspunkte der Strahlen $OB, O'C'$ und $OC, O'B'$ eine Gerade L' und endlich durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden L, L' und den der beiden Strahlen $OD, O'A'$ eine Gerade; so geht dieselbe durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden $OA, O'D'$ (§. 73), wodurch also der Strahl $O'D'$ bestimmt ist. —



Dritte Auflösung. — Durch den Durchschnittspunkt α der beiden homologen Strahlen $OA, O'A'$ ziehe man zwei Transversalen, wovon die eine die drei Strahlen OB, OC, OD in den drei Punkten b, c, d und die andern die drei Strahlen $O'B', O'C', O'D'$ in den drei Punkten b', c', d' schneidet; so gehen die drei Geraden bb', cc', dd' durch denselben Punkt (§. 71) Zieht man also durch den Durchschnittspunkt P der beiden ersten, welche bekannt sind, die Gerade Pd; so bestimmt diese den Punkt d', und mithin den gesuchten Strahl $O'D'$.

Die durch den Punkt α gezogenen beiden Transversalen sind ganz willkürlich — und die Construction vereinfacht sich, wenn



man die vom Punkte α durch die Durchſchnittspunkte δ, γ der Strahlenpaare $OB, O'B'$; $OC, O'C'$ gezogenen Geraden dazu nimmt. — Denn P iſt der Durchſchnittspunkt der Strahlen $O'B', OC$, und wenn man folglich dieſen Punkt mit dem Durchſchnittspunkte d von OD und $\alpha\delta$ verbindet; ſo ſchneidet die Gerade Pd die Gerade $\alpha\gamma$ in einem Punkte d', durch welchen der Strahl $O'D'$ geht. —

§. 76. Verſchiedene Ausdrücke für die homographiſche Theilung zweier Geraden. — Zweigliedrige Gleichungen. — Wenn a, b, c drei Punkte der erſten Geraden und a', b', c' die entſprechenden Punkte der zweiten ſind, und mann nimmt auf der erſten Geraden einen vierten Punkt m willkürlich an; ſo wird ſein homologer Punkt m' auf der zweiten Geraden durch die Relation:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{a'm'} : \frac{a'c'}{b'c'},$$

oder:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \right)$$

ausgedrückt, und da $\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}$ eine conſtante Größe λ iſt, ſo hat man:

$$(1) \qquad \frac{am}{bm} = \lambda . \frac{a'm'}{b'm'} .$$

Wenn alſo zwei Gerade homographiſch getheilt ſind, ſo ſteht das Verhältniß der Abſtände eines beliebigen Punktes der erſten Geraden von zwei feſten Punkten derſelben zu dem Verhältniß der Abſtände des homologen Punktes der zweiten Geraden von den beiden feſten homologen Punkten derſelben in einem conſtanten Verhältniſſe. —

§. 76a. Umgekehrt: Wenn zwei veränderliche Punkte m, m' zwei Gerade $ab, a'b'$ in Segmente theilen, deren Ver-

hältniſſe $\frac{am}{bm}$, $\frac{a'm'}{b'm'}$ in einem conſtanten Verhältniſſe ſtehen; ſo bilden dieſe beiden Punkte auf den beiden Geraden zwei homographiſche Theilungen. —

Denn wenn c,c' zwei beſondere Lagen der beiden Punkte m,m' ſind, ſo hat man die beiden Gleichungen:

$$\frac{am}{bm} = \lambda . \frac{a'm'}{b'm'} , \quad \frac{ac}{bc} = \lambda . \frac{a'c'}{b'c'} ,$$

woraus folgt:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'} ,$$

und hieraus ſieht man, daß die beiden Punkte m,m' zwei homographiſche Theilungen bilden.

§. 77. Man kann der Conſtante λ einen ſehr einfachen geometriſchen Ausdruck geben; denn nimmt man den Punkt m' in unendlicher Entfernung an, und iſt J die entſprechende Lage des Punktes m auf der erſten Geraden; ſo hat man:

$$\frac{a'm'}{d'm'} = 1, \frac{aJ}{bJ} = \lambda .$$

Ebenſo hat man, wenn J' den Punkt der zweiten Theilung bezeichnet, welcher dem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte m der erſten entſpricht:

$$\frac{b'J'}{a'J'} = \lambda .$$

Es läßt ſich leicht zeigen, daß dieſe beiden Ausdrücke von λ einander gleich ſind, nämlich:

$$\frac{aJ}{bJ} = \frac{b'J'}{a'J'} :$$

denn wenn ∞, ∞' die auf beiden Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte bezeichnen, ſo kann man ſetzen:

$$\frac{aJ}{bJ} : \frac{a\infty}{b\infty} = \frac{a'\infty'}{b'\infty'} : \frac{a'J'}{b'J'} ,$$

welche Gleichung richtig ist, weil sie ausdrückt, daß die vier Punkte a, b, J, ∞ auf der ersten Geraden und die vier Punkte a', b', ∞', J' auf der zweiten gleiche anharmonische Verhältnisse haben. —

Nach dem Obigen ist offenbar J ein fester, von a, b unabhängiger Punkt. Wenn also einer dieser beiden letzten Punkte beliebig angenommen ist, so kann man den zweiten so wählen, daß die Constante λ einen beliebigen positiven, oder negativen Werth bekommt, und man kann sogar $\lambda = -1$ machen, zu welchem Zwecke man die Punkte a, b nur zu beiden Seiten des Punktes J in gleichen Abständen zu nehmen braucht. —

Wenn $\lambda = +1$ sein soll, so fordert das Verhältniß $\frac{aJ}{bJ} = +1$, daß der Punkt J in unendlicher Entfernung liegt; d. h. dem auf der ersten Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte muß auch auf der zweiten Geraden ein in unendlicher Entfernung liegender Punkt entsprechen. —

Die Gleichung, welche diesen besondern Fall der homographischen Theilung zweier Geraden ausdrückt, ist:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'},$$

und die beiden Geraden sind ähnlich oder in proportionale Theile getheilt; denn aus den letzten Gleichung folgt:

$$\frac{am}{am - bm} = \frac{a'm'}{a'm' - b'm'}, \quad \frac{am}{ab} = \frac{a'm'}{a'b'},$$

oder:

$$\frac{am}{a'm'} = \frac{ab}{a'b'} = const.$$

Man kann also sagen: Wenn zwei Gerade in proportionale Theile getheilt sind, so sind sie auch homographisch getheilt; aber nur unter der Bedingung, daß die auf beiden Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte zwei homologe Theilungspunkte sind. —

§. 78. Untersuchung der Gleichung (1). — Diese Gleichung mit vier Segmenten kann so geschrieben werden, daß sie nur drei, oder zwei Segmente enthält, wenn einer, oder zwei der festen

Punkte in unendlicher Entfernung angenommen werden. Denn die ursprüngliche Form der Gleichung (1) ist:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'},$$

oder:

$$am = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \frac{bm}{bc} \left(ac : \frac{a'c'}{b'c'} \right),$$

und wenn der Punkt b in unendlicher Entfernung angenommen wird; so wird $\frac{bm}{bc} = 1$, und man hat:

$$(2) \qquad am = \mu . \frac{a'm'}{b'm'},$$

wo μ eine Constante bedeutet. —

Wenn auch der Punkt a' in unendlicher Entfernung angenommen wird, so ist $\frac{a'm'}{a'c'} = 1$, und die Gleichung wird:

$$am = \frac{\lambda}{b'm'}.$$

§. 79. Es sei J der Punkt a der ersten Geraden, welcher dem unendlich entfernten Punkte der zweiten entspricht, und J' der Punkt b' dieser zweiten, welcher dem unendlich entfernten Punkte auf der ersten Geraden entspricht; so ist die Gleichung:

$$(3) \qquad Jm . J'm' = \lambda.$$

Wenn also zwei Gerade homographisch getheilt sind, und man nimmt auf jeder den Punkt, welcher dem unendlich entfernten auf der andern entspricht; so ist das Product der Abstände irgend zweier homologen Punkte von den so bestimmten beiden Punkten constant. —

Umgekehrt: Wenn man auf zwei Geraden von zwei festen Punkten aus zwei solche Punkte nimmt, daß das Produkt ihrer Abstände von den beiden festen Punkten constant ist; so theilen diese beiden Punkte die beiden Geraden homographisch. —

Denn es seien J, J' die beiden festen Punkte, und m, m' zwei

auf den beiden Geraden so genommene Punkte, daß $Jm \cdot J'm' = \lambda$ ist. Ferner seien a, a' zwei entsprechende Lagen der beiden Punkte m, m', so daß $Ja \cdot J'a' = \lambda$ ist; so geben diese beiden Gleichungen:

$$\frac{Jm}{Ja} = 1 : \frac{J'm'}{J'a'},$$

und wenn u, v' die auf den beiden Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte bezeichnen, so kann man setzen:

$$\frac{Jm}{Ja} : \frac{um}{ua} = \frac{v'm'}{v'a'} : \frac{J'm'}{J'a'}.$$

Die vier Punkte a, J, u, m und die ihnen entsprechenden vier Punkte a', v', J', m' haben also gleiche anharmonische Verhältnisse, und wenn die drei ersten a, J, u und die ihnen entsprechenden a', v', J' fest bleiben; so theilen die beiden andern m, m' die beiden Geraden homographisch. (§. 64).

§. 80. Bemerkung über die Zeichen + und —. Wenn man die homographische Theilung zweier Geraden durch die Gleichung:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'}$$

ausdrückt, so ist es nicht nothwendig, den Sinn festzusetzen, in welchem die Segmente als positiv, oder als negativ betrachtet werden, weil jedes der Verhältnisse $\frac{am}{bm}$, $\frac{a'm'}{b'm'}$ ein von dieser Annahme unabhängiges Zeichen + oder — hat (§. 8). Die Lage des Punktes m gegen das Segment ab ist zur Bestimmung des Zeichens des Verhältnisses $\frac{am}{bm}$ hinreichend, wodurch auch das Zeichen des Verhältnisses $\frac{a'm'}{b'm'}$ und mithin die Lage des Punktes m' bestimmt wird, welcher auf dem Segmente $a'b'$, oder außerhalb desselben liegt, jenachdem das Verhältniß $\frac{a'm'}{b'm'}$ das Zeichen — oder + hat, so daß die Theilung der zweiten Geraden ohne alle Zweideutigkeit construirt wird. — Aber dasselbe ist nicht mehr der Fall, wenn man die Gleichung:

$$am = \lambda . \frac{a'm'}{b'm'}$$

nimmt, und man muß alsdann nothwendig den Sinn beſtimmen, in welchem das Segment am poſitiv, oder negativ iſt. —

Ebenſo muß man, wenn man die homographiſchen Theilungen durch die Gleichung:

$$am = \frac{\lambda}{b'm'}$$

ausdrückt, den Sinn feſtſetzen, in welchem das Segment $b'm'$ poſitiv iſt.

§. 81. Dreigliedrige Gleichungen. — Die Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe zweier Syſteme von vier Punkten a, b, c, m und a', b', c', m' wird nach §. 30, Gl. (2) durch die dreigliedrige Gleichung:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1$$

ausgedrückt, oder wenn man $\frac{bc}{ac} = \lambda$ und $\frac{b'a'}{c'a'} = \mu$ ſetzt, durch:

$$\lambda . \frac{am}{bm} + \mu . \frac{c'm'}{b'm'} = 1. \qquad (4)$$

Wenn alſo auf einer erſten Geraden zwei feſte Punkte a, b und auf einer zweiten Geraden zwei feſte Punkte $b'c'$ genommen werden, wovon der erſte b' willkürlich, aber der zweite c' der homologe Punkt von b iſt; ſo drückt dieſe Gleichung die homographiſche Theilung der beiden Geraden aus. Dieſe dreigliedrigen Gleichungen werden oft angewandt. —

Da die drei Punkte a, b, c' willkürlich ſind, ſo kann man auf jeder Geraden einen davon ſich ins Unendliche entfernen laſſen, wodurch unendlich werdende Segmente vorkommen, welche Verhältniſſe $= 1$ geben, wie in den zweigliedrigen Gleichungen. —

Wenn a in unendlicher Entfernung liegt, ſo wird die Gleichung (4):

$$-\frac{\lambda}{bm} + \mu . \frac{c'm'}{b'm'} = 1; \qquad (5)$$

wenn a und b' unendlich entfernt sind, so wird sie:

$$\frac{\lambda}{bm} + \mu \cdot c'm' = 1, \tag{6}$$

und wenn a, c' sich ins Unendliche entfernen:

$$\frac{\lambda}{bm} + \frac{\mu}{b'm'} = 1. \tag{7}$$

Jede dieser Gleichungen drückt die allgemeine homographische Theilung zweier Geraden aus. —

§. 82. In der letzten Gleichung haben die Constanten λ, μ sehr einfache geometrische Ausdrücke. Denn wenn m' unendlich entfernt und J der entsprechende Punkt der ersten Geraden ist, so wird diese Gleichung $\frac{\lambda}{bJ} = 1$. Bezeichnet ebenso J' den Punkt der zweiten Geraden, welcher dem unendlich entfernten der ersten entspricht; so hat man $\frac{\mu}{b'J'} = 1$, und die Gleichung wird:

$$\frac{bJ}{bm} + \frac{b'J'}{b'm'} = 1.$$

Diese Gleichung drückt also die homographische Theilung zweier Geraden aus, indem J der Punkt der ersten ist, welcher dem in unendlicher Entfernung auf der zweiten liegenden Punkte entspricht, und J' der Punkt dieser zweiten Geraden, welcher dem unendlich entfernten auf der ersten entspricht, während b, b' zwei beliebige homologe Punkte sind.

Wenn also a, a' zwei andere homologe Punkte sind, so hat man die beiden Relationen:

$$\frac{bJ}{bm} + \frac{b'J'}{b'm'} = 1,$$

$$\frac{aJ}{am} + \frac{a'J'}{a'm'} = 1,$$

so daß zwei dieser drei Gleichungen die dritte zur Folge haben. —

§. 83. In dem besondern Falle, wo die beiden Geraden ähnlich oder in proportionale Theile getheilt sind, sind die beiden,

in unendlicher Entfernung liegenden Punkte correspondirende (§. 77), so daß man sie für die Punkte b, b' nehmen kann, und alsdann wird die Gleichung (4):

$$\lambda . am + \mu . c'm' = 1. \tag{8}$$

Diese Gleichung drückt also aus, daß zwei Gerade in proportionale Theile getheilt sind.

Die beiden Constanten λ, μ haben sehr einfache geometrische Ausdrücke; denn läßt man den Punkt m mit a zusammenfallen, so fällt m' mit a' zusammen, und man hat $\mu . c'a' = 1$, also $\mu = \frac{1}{c'a'}$. Desgleichen, da c' in der zweiten Theilung der homologe Punkt von c in der ersten ist, so hat man $\lambda = \frac{1}{ac}$. Durch Substitution dieser Werthe wird die Gleichung (8):

$$\frac{am}{ac} + \frac{c'm'}{c'a'} = 1,$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß diese Gleichung auf die in §. 77 erhaltenen beiden Formen:

$$\frac{am}{ac} = \frac{a'm'}{c'm'}, \quad \frac{am}{a'm'} = \frac{ac}{a'c'}$$

gebracht werden kann. Denn setzt man:

$$c'm = a'm' - a'c',$$

so wird sie:

$$\frac{am}{ac} + \frac{a'm'}{c'a'} = 0 \text{ oder } \frac{am}{ac} = \frac{a'm'}{a'c'},$$

und wenn man in dieser Gleichung setzt:

$$ac = am - cm, \; a'c' = a'm' - c'm',$$

so wird sie:

$$\frac{am}{am - cm} = \frac{a'm'}{a'm' - c'm'}, \quad \frac{am}{cm} = \frac{a'm'}{c'm'}.$$

Man sieht leicht ein, daß die Bemerkung in §. 80 über die Nothwendigkeit der Angabe des Sinnes, in welchem die positiven,

oder negativen Segmente genommen werden müssen, auch in Bezug auf die Gleichungen (5), (6), (7) und (8) gilt. —

§. 84. Die Gleichung (6) führt ganz einfach auf eine interessante Eigenschaft zweier homographischer Theilungen, welche darin besteht: daß man von einem gegebenen Punkte der ersten Theilung aus immer zwei Segmente nehmen kann, welche ihren homologen in der zweiten Theilung **gleich** sind; aber das eine mit **demselben** und das andere mit **entgegengesetztem** Zeichen. —

Denn die beiden Theilungen werden durch die Gleichung:

$$\frac{\lambda}{am} + \frac{\mu}{a'm'} = 1$$

ausgedrückt, und wenn das Segment am seinem homologen $a'm'$ gleich und von demselben Zeichen sein soll; so wird der Punkt m durch die Gleichung:

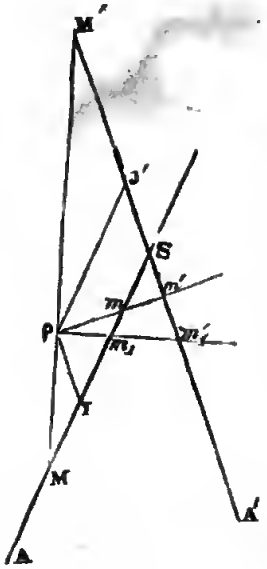
$$am = \lambda + \mu$$

bestimmt. Soll dagegen ein Segment aM seinem homologen $a'M'$ gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein, so hat man:

$$a'M' = \lambda - \mu,$$

und wenn man für die Constanten λ, μ ihre Ausdrücke setzt; so ist:

$$am = aJ + a'J',$$
$$a'M' = aJ - a'J'.$$



Beispiel 1. Wenn man um einen festen Punkt ρ sich eine Transversale drehen läßt, welche die beiden Geraden SA, SA' in den Punkten m, m' schneidet; so bestimmen diese beiden Punkte zwei homographische Theilungen, die durch den Punkt ρ zu den beiden Geraden gezogenen Parallelen bestimmen die beiden Punkte J, J', und die Homographie wird durch die Gleichung:

$$\frac{SJ}{Sm} + \frac{SJ'}{Sm'} = 1$$

ausgedrückt (§. 82). Wir wollen annehmen, daß die positiven Segmente in dem Sinne

gegen A und A' zu genommen werden, und die negativen Segmente in entgegengeſetzten Sinne.

Wenn $Sm_1 = Sm'_1$ ſein ſoll, ſo hat man:

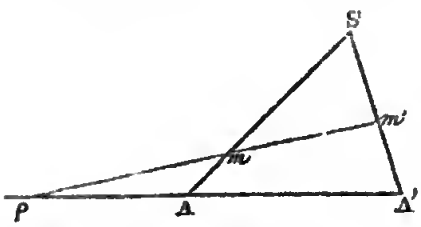
$$Sm_1 = SJ + SJ'.$$

In der Figur iſt SJ poſitiv und SJ' negativ; man muß folglich $Jm_1 = SJ$ von J gegen S zu nehmen, wodurch der Punkt m_1 beſtimmt wird. —

Wenn $SM = -SM'$ ſein ſoll, ſo hat man:

$$SM = SJ - SJ',$$

und da SJ' in der Figur ſchon negativ iſt; ſo iſt der Zahlenwerth von $SM = SJ + SJ'$. Nimmt man alſo von J aus in dem poſitiven Sinne $JM = SJ'$, ſo iſt das Segment SM beſtimmt.



Beiſpiel 2. Wenn man von einem Punkte ϱ der Baſis eines Dreieckes SAA' die Transverſale $\varrho mm'$ ſo ziehen ſoll, daß $Am = \pm A'm'$ wird; ſo iſt die Auflöſung dieſelbe. Für eine beliebige Trarsverſale hat man:

$$\frac{AJ}{Am} + \frac{A'J'}{A'm'} = 1,$$

und für $Am = \pm A'm'$:

$$Am = AJ \pm A'J'$$

Um dieſe Ausdrücke von Am conſtruiren zu können, muß man wiſſen, in welchem Sinne die poſitiven Segmente auf den Geraden SA, SA' genommen werden. —

Wenn die beiden Segmente $Am, A'm'$ in einem gegebenen Verhältniſſe ſtehen ſollen, ſo daß $Am = \pm \lambda A'm'$ iſt; ſo wird Am durch die Gleichung:

$$Am = AJ \pm \lambda A'J'.$$

beäimmt; allein dieſe Aufgaben ſind nur ſpecielle Fälle des von Apollonius ſogenannten Problemes vom Raumſchnitt, wovon wir ſpäter eine allgemeine Auflöſung geben werden. Hier

war unsere Absicht blos: die in dem obigen Satze liegende Eigenschaft der beiden homographischen Theilungen zu beweisen, und an einem Beispiele den Gebrauch der Zeichen + und — bei den Anwendungen dieser Theorie zu zeigen. —

§. 85. Andere dreigliedrige Gleichungen. — Man kann zwei homographische Theilungen auch durch die Gleichung:

$$\frac{am}{a'm'}\,bc\,.\,a'\pi' + \frac{bm}{b'm'}\,ca\,.\,b'\pi' + \frac{cm}{c'm'}\,ab\,.\,c'\pi' = 0$$

ausdrücken, wo a,b,c drei feste Punkte der ersten Theilung, a',b', c' drei homologe Punkte und π' einen willkürlichen festen Punkt der zweiten Theilung bedeuten (§. 30), oder wenn der Punkt π' unendlich entfernt angenommen wird, durch die Gleichung:

$$\frac{am}{a'm'}\,bc + \frac{bm}{b'm'}\,ca + \frac{cm}{c'm'}\,ab.$$

§. 86. Viergliedrige Gleichungen. — Es sei a ein fester Punkt der ersten Geraden, b' ein beliebiger fester Punkt der zweiten, und m,m' seien zwei beliebige entsprechende Punkte beider Geraden; so findet zwischen den beiden Segmenten $am, b'm'$ immer die Relation statt:

$$am\,.\,b'm' + \lambda\,.\,am + \mu\,.\,b'm' + \nu = 0,$$

worin λ,μ,ν constante Coefficienten sind. —

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, wollen wir auf der zweiten Geraden einen Punkt a' betrachten, welcher der entsprechende des Punktes a der ersten Geraden ist, und auf dieser den Punkt b, welcher der entsprechende des Punktes b' der zweiten ist; so ist (§. 76):

$$(\alpha) \qquad \frac{am}{bm} = k\,.\,\frac{a'm'}{b'm'},$$

oder:

$$am\,.\,b'm' - k\,.\,bm\,.\,a'm'\,.\,= 0.$$

Da wir nur die Segmente $am, b'm'$ beizubehalten haben, so wollen wir für bm und $a'm'$ ihre Ausdrücke:

(ε) $$bm = am - ab, a'm' = b'm' - b'a'$$

setzen, und alsdann kommt:

$$am \,.\, b'm' - k\,(am - ab)\;(b'm' - b'a') = 0,$$

oder:

$$am \,.\, b'm'\,(1-k) + k \,.\, b'a' \,.\, am + k \,.\, ab \,.\, b'm' - k \,.\, ab \,.\, b'a' = 0$$ *)

oder:

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0,$$ w. z. b. w.

Offenbar müssen in dieser Gleichung, so wie in mehrern der vorhergehenden, die Segmente $am, b'm'$ die entsprechenden Zeichen haben, was auch aus der Ableitungsart der Gleichung selbst folgt; denn wenn es auch nicht durchaus nöthig ist, den Segmenten in der Gleichung (α) Zeichen zu geben, so müssen sie doch in den Relationen (ε) solche haben (§. 2), und folglich auch in der daraus abgeleiteten Gleichung. —

Oder: Es seien J und J' die beiden Punkte, welche resp. auf der ersten und zweiten Geraden den auf der zweiten und ersten unendlich entfernten Punkten entsprechen; so hat man (§. 79):

$$Jm \,.\, J'm' = const.$$

Nun ist aber:

$$Jm = am - aJ \text{ und } J'm' = b'm' - b'J';$$

folglich:

$$(am - aJ)\,(b'm' - b'J') = const.$$

oder:

$$am \,.\, b'm' - am \,.\, b'J' - b'm' \,.\, aJ = const.$$ w. b. w. f.

§. 87. Zur Bestimmung des geometrischen Ausdruckes der Constante wollen wir den Punkt m mit a zusammenfallen lassen, und es sei a' die entsprechende Lage des Punktes m'; so ist:

$$-b'a' \,.\, aJ = const.$$

---

*) Statt der Constante k kann man zwei homologe Punkte c, c' einführen, und alsdann ist:

$$k = \frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'}.$$

oder wenn angenommen wird, daß m' mit b' und m mit b zusammenfällt:

$$-ab \,.\, b'J' = const.$$

Die Gleichung wird folglich:

$$am \,.\, b'm' - am \,.\, b'J' - b'm' \,.\, aJ + aJ \,.\, b'a' = 0,$$

oder:

$$am \,.\, b'm' - am \,.\, b'J' - b'm' \,.\, aJ + b'J' \,.\, ab = 0.$$

Umgekehrt: Wenn man auf zwei Geraden von zwei festen Punkten a, b' aus zwei Segmente $am, b'm'$ nimmt, für welche stets die Relation:

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0$$

stattfindet; so bilden die Punkte m, m' zwei homographische Theilungen.

Denn nimmt man den Punkt m in unendlicher Entfernung an, und ist J' die entsprechende Lage des Punktes m'; so reducirt sich die durch $am = \infty$ dividirte Gleichung auf:

$$b'J' + \lambda = 0,$$

woraus folgt:

$$\lambda = -b'J'.$$

Dasgleichen, wenn m' in unendlicher Entfernung angenommen wird, und J ist die entsprechende Lage des Punktes m auf der ersten Geraden; so findet man:

$$\mu = -aJ.$$

Die gegebene Gleichung wird folglich:

$$am \,.\, b'm' - b'J' \,.\, am - aJ \,.\, b'm' + \nu = 0,$$

oder:

$$(am - aJ)\,(b'm' - b'J') - aJ \,.\, b'J' + \nu = 0.$$

Nun ist aber:

$$am - aJ = Jm \text{ und } b'm' - b'J' = J'm';$$

folglich:

$$Jm \,.\, J'm' = aJ \,.\, b'J' - \nu,$$

und da der zweite Theil dieſer Gleichung conſtant iſt; ſo beſtimmen die beiden Punkte m, m' zwei homographiſche Theilungen (§. 79).

Oder: Wenn r und ϱ die beiden Segmente $am, b'm'$ bezeichnen, ſo wird die Gleichung:

$$r\varrho + \lambda r + \mu\varrho + \nu = 0,$$

oder:

$$r(\varrho + \lambda) + \mu\varrho + \nu = 0,$$

und wenn die beiden veränderlichen Punkte m, m' zwei homographiſche Theilungen bilden ſollen; ſo muß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte, wozu m gehört, dem anharmoniſchen Verhältniſſe der vier Punkte, wozu m' gehört, gleich ſein. Bezeichnen alſo r, r', r'', r''' die den erſten vier Punkten entſprechenden Segmente, und $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ die den vier letzten entſprechenden; ſo wird die Gleichheit der beiden anharmoniſchen Verhältniſſe ausgedrückt durch:

$$\frac{r - r''}{r - r'''} : \frac{r' - r''}{r' - r'''} = \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho - \varrho'''} : \frac{\varrho' - \varrho''}{\varrho' - \varrho'''}.$$

Die Relation zwiſchen r und ϱ gibt aber:

$$r = -\frac{\mu\varrho + \nu}{\varrho + \lambda},$$

und ebenſo:

$$r'' = -\frac{\mu\varrho'' + \nu}{\varrho'' + \lambda};$$

folglich:

$$r - r'' = \frac{(\nu - \lambda\mu)(\varrho - \varrho'')}{(\varrho + \lambda)(\varrho'' + \lambda)},$$

und ebenſo:

$$r - r'' = \frac{(\nu - \lambda\mu)(\varrho - \varrho''')}{(\varrho + \lambda)(\varrho''' + \lambda)}.$$

Mithin iſt:

$$\frac{r - r''}{r - r'''} = \frac{\varrho - \varrho''}{\varrho - \varrho'''} \cdot \frac{\varrho''' + \lambda}{\varrho'' + \lambda},$$

und ebenſo:

$$\frac{r' - r''}{r' - r'''} = \frac{\varrho' - \varrho''}{\varrho' - \varrho'''} \cdot \frac{\varrho''' + \lambda}{\varrho'' + \lambda};$$

folglich:

$$\frac{r-r''}{r-r'''} : \frac{r'-r''}{r'-r'''} = \frac{\varrho-\varrho''}{\varrho-\varrho'''} : \frac{\varrho'-\varrho''}{\varrho'-\varrho'''}.$$

Es ist also direkt bewiesen, daß die Gleichung:

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0$$

die homographische Theilung zweier Geraden ausdrückt. —

§. 88. Wir haben die geometrischen Ausdrücke der drei Coefficienten λ, μ, ν gefunden, indem wir von der Gleichung:

$$Jm \,.\, J'm' = const.$$

ausgingen (§. 86); allein man kann sie auch direkt bestimmen. — Es sei J der Punkt der ersten Geraden, welcher dem unendlich entfernten auf der zweiten entspricht; so hat man, wenn man in der Gleichung $b'm'$ unendlich setzt:

$$aJ + \mu = 0, \text{ also } \mu = -aJ,$$

und ebenso:

$$\lambda = -b'J',$$

wo J' den Punkt der zweiten Geraden bedeutet, welcher dem unendlich entfernten auf der ersten entspricht. — Die Gleichung wird folglich:

$$am \,.\, b'm' - b'J' \,.\, am - aJ \,.\, b'm' + \nu = 0.$$

Für die beiden Werthe der Constante ν haben wir in §. 87 die beiden Ausdrücke $aJ \,.\, b'a'$ und $b'J' \,.\, ab$ gefunden, so daß die Gleichung wird:

$$am \,.\, b'm' - b'J' \,.\, am \,.\, aJ \,.\, b'm' + aJ \,.\, b'a' \,(\text{oder } b'J' \,.\, ab) = 0.$$

Die Gleichheit dieser beiden Werthe von ν und der Grund davon läßt sich leicht zeigen; denn die Gleichung:

$$aJ \,.\, b'a' = b'J' \,.\, ab$$

kann so geschrieben werden:

$$\frac{aJ}{ab} = \frac{b'J'}{b'a'},$$

und unter dieser Form drückt sie aus: daß das anharmonische Ver-

hältniß der vier Punkte a, b, J, ∞ dem der vier entſprechenden Punkte a', b', ∞', J' gleich iſt. —

§. 89. Homogene viergliedrige Gleichungen. — Wenn zwei Gerade homographiſch getheilt ſind, und man nimmt auf der erſten zwei beliebige feſte Punkte a, c, und auf der zweiten zwei beliebige feſte Punkte b', d'; ſo wird die homographiſche Theilung ausgedrückt durch die homogene Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{am}{cm} \cdot \frac{b'm'}{d'm'} + \lambda \frac{am}{cm} + \lambda \frac{b'm'}{d'm'} + \nu = 0.$$

Beweis 1. Es ſeien p, q' die reſp. auf den beiden Geraden in unendlicher Entfernung liegenden Punkte, ſo kann die Gleichung wie folgt geſchrieben werden:

$$(2) \left(\frac{am}{cm} : \frac{ap}{cp}\right)\left(\frac{b'm'}{d'm'} : \frac{b'q'}{d'q'}\right) + \lambda\left(\frac{am}{cm} : \frac{ap}{cp}\right) + \mu\left(\frac{b'm'}{d'm'} : \frac{b'q'}{d'q}\right) + \nu = 0.$$

Da dieſe letzte Gleichung aus anharmoniſchen Verhältniſſen beſteht, ſo darf man ſagen: daß ſie aus der Gleichung (1) hervorgeht, ſelbſt wenn die Punkte p, q' in endlichen Entfernungen genommen werden (§. 14), ſo daß, wenn die Gleichung (1) die homographiſche Theilung zweier Geraden ausdrückt, die Gleichung (2), worin a, c, p drei beliebige feſte Punkte auf der erſten Geraden und a', d', q' drei ſolche Punkte auf der zweiten ſind, ebenfalls die homographiſche Theilung der beiden Geraden ausdrückt. — Aber in (2) können die beiden Punkte c, d' in unendlicher Entfernung angenommen werden, und alsdann wird ſie:

$$(3) \qquad \frac{am}{ap} \cdot \frac{b'm'}{b'q'} + \lambda \frac{am}{ap} + \mu \frac{b'm'}{b'q'} + \nu = 0.$$

Wenn alſo die homographiſche Theilung der beiden Geraden durch die Gleichung (1) ausgedrückt wird, ſo wird ſie auch durch die Gleichung (3) ausgedrückt — und umgekehrt kann man von (3) zu (1) zurückgehen. Aber die Gleichung (3) drückt die homographiſche Theilung der beiden Geraden aus (§. 86); alſo die Gleichung (1) ebenfalls. —

§. 90. Die drei Conſtanten λ, μ, ν haben ſehr einfache geometriſche Ausdrücke, welche von den vier gegebenen Punkten a, c, b', d'

und von den ihnen entſprechenden vier Punkten a', c', b, d abhängen. — Wenn man annimmt, daß der Punkt m mit c, und folglich m' mit c' zuſammenfällt; ſo ergibt ſich aus der Gleichung der Werth:

$$\lambda = -\frac{b'c'}{d'c'},$$

und ebenſo, wenn man m' mit d' zuſammenfallen läßt:

$$\mu = -\frac{ad}{cd},$$

Läßt man ferner m mit a und dann mit b zuſammenfallen, ſo hat man:

$$\nu = \frac{ad}{cd} \cdot \frac{b'a'}{d'a'} \text{ und } \nu = \frac{ab}{cb} \cdot \frac{b'c'}{d'c'},$$

und die Gleichung (1) wird:

$$(4)\quad \frac{am}{cm} \cdot \frac{b'm'}{d'm'} - \frac{b'c'}{d'c'} \cdot \frac{am}{cm} - \frac{ad}{cd} \cdot \frac{b'm'}{d'm'} + \frac{ab}{cb} \cdot \frac{c'b'}{c'd'} = 0,$$

worin für das letzte Glied auch $\frac{b'a'}{d'a'} \cdot \frac{ad}{cd}$ geſetzt werden kann.—

Aus den Werthen der drei Conſtanten λ, μ, ν ſieht man: daß, wenn die Zahlenwerthe dieſer Conſtanten gegeben ſind, man daraus unmittelbar die Lage der vier Punkte a', c', b, d ableiten kann, welche reſp. den vier gegebenen Punkten a, c, b', d' entſprechen. —

§. 91. Die Gleichung (4) kann ſo geſchrieben werden, daß alle Glieder derſelben nur anharmoniſche Verhältniſſe enthalten, ſo daß ſie auf zwei homographiſche Büſchel angewandt werden kann (§. 14). Zu dem Zwecke braucht man ſie nur durch $\frac{ad}{cd} : \frac{b'c'}{d'c'}$ zu dividiren, wodurch man erhält:

$$(5)\quad \left(\frac{am}{cm} : \frac{ad}{cd}\right)\left(\frac{b'm'}{d'm'} : \frac{b'c'}{d'c'}\right) - \left(\frac{am}{cm} : \frac{ad}{cd}\right) - \left(\frac{b'm'}{d'm'} : \frac{b'c'}{d'c'}\right) + \left(\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}\right) \text{ oder } \left(\frac{b'a'}{d'a'} : \frac{b'c'}{d'c'}\right) = 0.$$

Aus dieſer allgemeinen Gleichung laſſen ſich alle frühern, zwei-, drei- und viergliedrigen Gleichungen ableiten, wobei wir uns jedoch nicht aufhalten wollen. —

Beweis 2. — Die Gleichung (4) kann vermittelst der in §. 17 zur Verlegung des Anfangspunktes entwickelten Formeln auch aus der Fundamentalgleichung:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'} \text{ (§. 76)}$$

hergeleitet werden. — Denn nimmt man auf den beiden Geraden resp. die beiden festen Punkte c, d' und ersetzt die beiden Verhältnisse $\frac{am}{bm}$, $\frac{a'm'}{b,m'}$ mittelst der Formeln:

$$\frac{bm}{am} = \frac{bc}{ac} + \frac{ab}{ac} \cdot \frac{cm}{am},$$

$$\frac{a'm'}{b'm'} = \frac{a'd'}{b'd'} + \frac{b'a'}{b'd'} \cdot \frac{d'm'}{b'm'}$$

durch $\frac{am}{cm}$, $\frac{d'm'}{b'm'}$; so wird die Gleichung:

$$\left(\frac{bc}{ac} + \frac{ab}{ac} \cdot \frac{cm}{am}\right)\left(\frac{a'd'}{b'd'} + \frac{b'a'}{b'd'} \cdot \frac{d'm'}{b'm'}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Nun ist aber nach der Fundamentalgleichung selbst $\lambda = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{a'c'}{b'c'}$, und nach §. 15 hat man für die vier Punkte a', b', c', d' die Relation:

$$\frac{a'd'}{b'd'} - \frac{a'c'}{b'c'} = \frac{a'b'}{c'b} \cdot \frac{c'd'}{b'd'}.$$

Durch Substitution ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{am}{cm} \cdot \frac{b'm'}{d'm'} \cdot \frac{bc}{ac} \cdot \frac{a'b'}{c'b'} \cdot \frac{c'd'}{b'd'} + \frac{am}{cm} \cdot \frac{bc}{ac} \cdot \frac{b'a'}{b'd'}$$
$$+ \frac{b'm'}{d'm'} \cdot \frac{ab}{ac} \cdot \frac{a'd'}{b'd'} + \frac{ab}{ac} \cdot \frac{b'a'}{b'd'} = 0,$$

und wenn man durch $\frac{bc}{ac} \cdot \frac{a'b'}{c'b'} \cdot \frac{c'd'}{b'd'}$ dividirt und die Gleichheit:

$$\frac{ab}{cb} \cdot \frac{ad}{cd} = \frac{a'b'}{c'b'} : \frac{a'd'}{c'd'}, \text{ also: } \frac{ab}{cb} \cdot \frac{a'd'}{a'b'} \cdot \frac{c'b'}{c'd'} = -\frac{ad}{cd}$$

beachtet; so erhält man endlich die gesuchte Gleichung:

$$\frac{am}{cm}\cdot\frac{b'm'}{d'm'}-\frac{b'c'}{d'c'}\cdot\frac{am}{cm}-\frac{ad}{cd}\cdot\frac{b'm'}{d'm'}+\frac{ab}{cb}\cdot\frac{c'b'}{c'd'}=0.$$

§. 91a. Mehrgliedrige Gleichungen. — Es seien $A, C, E, G, \ldots$ feste Punkte auf einer ersten Geraden und $B', D', F', H' \ldots$ feste Punkte auf einer zweiten Geraden. Wenn man auf diesen beiden Geraden zwei veränderliche Punkte m, m' so nimmt, daß stets die Relation stattfindet:

$$\alpha\,.\,Am\,.\,B'm'+\beta\,.\,Cm\,.\,D'm'+\ldots\varepsilon\,.\,Em+\varphi\,.\,F'm'+\zeta\,.\,Gm$$
$$+\eta\,.\,H'm'+\ldots=\nu,$$

so bilden die beiden Punkte m, m' zwei homographische Theilungen.

Denn diese Gleichung läßt sich auf die viergliedrige Gleichung:

$$Am\,.\,B'm'+\lambda\,.\,Am+\mu\,.\,B'm'+\delta=0,\ (\S.\ 86)$$

zurückführen, zu welchem Zwecke man nur alle Segmente durch zwei, von zwei Anfangspunkten, etwa A und B' aus, gezählte Segmente auszudrücken braucht, indem man setzt:

$$Cm=Am-AC, \qquad D'm'=B'm'-B'D',$$
$$Em=Am-AE, \qquad F'm'=B'm'-B'F',$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Bemerkenswerth ist bei dieser und den frühern Gleichungen, daß darin kein Produkt zweier sich auf denselben Punkt m oder m' beziehender Segmente vorkommt, so daß einem Punkte m nur ein Punkt m' entspricht, und umgekehrt — und hierin besteht die charakteristische Eigenschaft der homographischen Theilungen. —

§. 92. Homographische Strahlenbüschel. — Man kann die Homographie zweier Strahlenbüschel dadurch ausdrücken, daß man sie mit einer oder zwei Transversalen durchschneidet und ausdrückt: daß sie auf diesen Geraden zwei homographische Theilungen machen; aber man kann sich auch der allgemeinen Relationen bedienen, welche zwischen den Sinussen der Winkel stattfinden, die zwei homologe Strahlen mit festen Axen bilden. — Diese Relationen haben, wie die sich auf die homographischen Theilungen zweier Geraden beziehenden, verschiedenen Formen.

§. 93. Zweigliedrige Gleichungen. — Wenn A, B, C, M die vier Strahlen des erſten Büſchels und A', B', C', M' die des zweiten bedeuten; ſo hat man (§ 31):

$$\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} : \frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)} = \frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')} : \frac{\sin(A',C')}{\sin(B',C')},$$

oder:

$$\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \frac{\sin(A',M')}{\sin(A',M')} \cdot \left[\frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)} : \frac{\sin(A',C')}{\sin(B',C')}\right],$$

oder endlich, wenn man den conſtanten Faktor im zweiten Theile mit λ bezeichnet:

$$(1) \qquad \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \lambda \cdot \frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')}.$$

Wenn die beiden feſten Geraden A, B aufeinander ſenkrecht ſind, ſo iſt $\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = tang.(A,M)$, und wenn auch A', B' aufeinander ſenkrecht ſind; ſo iſt $\frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')} = tang(A',M')$, und die Gleichung (1) wird:

$$(2) \qquad tang(A,M) = \lambda . tang(A',M').$$

Da in dieſer Gleichung die Richtung jedes Strahles AM oder $A'M'$ gegen eine Gerade OA oder $O'A'$ beſtimmt wird, ſo muß man feſtſetzen, in welchem Sinne die poſitiven Winkel um die Mittelpunkte A, A' gezählt werden. —

§. 94. Zwei Büſchel, deren Winkel paarweiſe einander gleich ſind, ſind offenbar homographiſch — und ihre Homographie wird ausgedrückt durch:

$$(3) \qquad \text{Winkel}(A,M) = \pm \text{Winkel}(A',M').$$

Die beiden Büſchel können in Bezug auf den Sinn, in welchem ſich ihre reſp. Strahlen drehen, zwei verſchiedene Fälle darbieten. Wenn ſich die Strahlen in demſelben Sinne drehen, ſo können die beiden Büſchel, welche denſelben Mittelpunkt haben mögen, durch eine einfache Drehung des einen zum Zuſammenfallen gebracht werden. Wenn ſich die Strahlen in entgegengeſetztem Sinne dre-

hen, so gibt es immer zwei Strahlen, wovon jeder, als dem ersten Büschel angehörig betrachtet, in dem zweiten Büschel selbst sein homologer ist. Diese beiden Strahlen sind aufeinander senkrecht, und die beiden Büschel haben zu beiden Seiten eines jeden eine symmetrische Lage. — Im ersten Falle werden wir sagen: daß die beiden Büschel ähnlich — und im zweiten: daß sie symmetrisch sind. —

§. 95. Dreigliedrige Gleichungen. — Für die vier Strahlen A, B, C, M und ihre homologen A', B', C', M' hat man (§. 31):

$$\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} : \frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)} + \frac{\sin(C',M')}{\sin(B',M')} : \frac{\sin(C',A')}{\sin(B',A')} = 1.$$

und wenn man setzt:

$$\frac{\sin(B,C)}{\sin(A,C)} = \lambda\,, \quad \frac{\sin(B',A')}{\sin(C',A')} = \mu;$$

so kommt:

$$(4) \qquad \lambda . \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} + \mu \frac{\sin(C',M')}{\sin(B',M')} = 1.$$

Wenn also zwei feste Gerade A, B, zwei andere feste Gerade C', B' und zwei Constanten λ, μ gegeben sind; so drückt diese Gleichung aus, daß die beiden Geraden M, M' zwei homographische Büschel bilden. — In diesen beiden Büscheln sind B, B' zwei correspondirende Strahlen, aber A und C' nicht, sondern diese sind willkürlich angenommen. —

Wenn A senkrecht auf B und C' senkrecht auf B' ist, so wird die Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{\lambda}{tang\,(B,M)} + \frac{\mu}{tang\,(B',M')} = 1,$$

wofür man auch setzen kann:

$$(6) \qquad \lambda . tang\,(A,M) + \mu\, tang\,(C',M') = 1.$$

Hier ist aber wohl zu bemerken: daß, wenn die beiden Büschel gegeben sind, die Strahlen A und C' nicht willkürlich sind; denn ihre resp. Perpendikel B und B' müssen zwei correspondirende Strahlen der beiden Büschel sein. —

§. 96. Die Gleichung (5) führt auf folgende Eigenschaft zweier

homographiſcher Büſchel: Wenn ein Strahl des erſten Büſchels angenommen wird, ſo kann man immer zwei andere Strahlen beſtimmen, welche mit jenem zwei Winkel bilden, die reſp. ihren homologen in dem zweiten Büſchel gleich ſind; aber der eine von demſelben und der andere von dem entgegengeſetzten Zeichen.

Denn die beiden von dem Strahl B aus gebildeten und der Bedingung genügenden Winkel werden durch die Gleichung beſtimmt:

$$tang\,(B,M) = \lambda \pm \mu.$$

§. 97. Viergliedrige Gleichungen. — Die viergliedrige homogene Gleichung (4) in §. 90, welche die homographiſche Theilung zweier Geraden ausdrückt, führt zu einer ähnlichen Gleichung zwiſchen den Sinuſſen der Winkel zweier homographiſcher Büſchel (§. 91). Sind nämlich A, B, C, D vier feſte Strahlen des erſten Büſchels, A', B', C', D' die entſprechenden des zweiten und M, M' zwei entſprechende veränderliche Strahlen; ſo hat man die Gleichung:

$$\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} \cdot \frac{sin(B',M')}{sin(D',M')} - \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} \cdot \frac{sin(B',C')}{sin(D',C')}$$
$$- \frac{sin(B',M')}{sin(D',M')} \cdot \frac{sin(A,D)}{sin(C,D)} + \frac{sin(A,D)}{sin(C,D)} \cdot \frac{sin(B',A')}{sin(D',A')} = 0,$$

worin man für das letzte Glied auch ſetzen kann:

$$\frac{sin(B',C')}{sin(D',C')} \cdot \frac{sin(A,B)}{sin(C,B)}.$$

Man kann auch ſchreiben:

$$(7) \quad \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} : \frac{sin(B',M')}{sin(D',M')} + \lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)}$$
$$+ \mu \cdot \frac{sin(B',M')}{sin(D',M')} + \nu = 0.$$

Dieſe Gleichung drückt alſo aus: daß die beiden Strahlen M, M' zwei homographiſche Büſchel bilden. —

In dem erſten Büſchel ſind A, C und in dem zweiten B', D'

willkürlich. — Wenn A, C, ſowie B', D' auf einander ſenkrecht ſind, ſo wird die Gleichung:

(8) $tang(A,M)\,tang(B',M') + \lambda\, tang(A,M) + \mu\, tang(B',M') + \nu = 0.$

§. 98. Wenn der Mittelpunkt O' eines der beiden Büſchel in unendlicher Entfernung liegt, oder wenn die Strahlen dieſes Büſchels parallel ſind; ſo muß man in den vorhergehenden Formeln für die Sinuſſe der Winkel dieſer Strahlen die Segmente ſetzen, welche ſie auf einer Transverſale beſtimmen (§. 11). Die Homographie der beiden Büſchel wird alſo durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

Zweigliedrige Gleichungen.

$$\frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'},$$

$$\frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} = \lambda \cdot a'm',$$

$$\frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} = \frac{\lambda}{b'm'}.$$

Dreigliedrige Gleichungen.

$$\lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} + \mu \cdot \frac{c'm'}{b'm'} = 1,$$

$$\lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} + \mu \cdot c'm' = 1,$$

$$\lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(B,M)} + \frac{\mu}{b'm'} = 1.$$

Viergliedrige Gleichungen.

$$\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} \cdot \frac{b'm'}{d'm'} + \lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} + \mu \cdot \frac{b'm'}{d'm'} + \nu = 0,$$

$$\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)}\, b'm' + \lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} + \mu \cdot b'm' + \nu = 0,$$

$$\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} \cdot \frac{1}{d'm'} + \lambda \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} + \frac{\mu}{d'm'} + \nu = 0.$$

§. 99. Homographiſche Theilungen auf derſelben Geraden. — Doppelpunkte. — Wenn zwei homographiſch

getheilte Gerade auf einander gelegt werden, so gibt es zwei (reelle, oder imaginäre) Punkte, wovon jeder, als der ersten Theilung angehörig betrachtet, mit seinem homologen in der zweiten Theilung zusammenfällt.

Denn die homographische Theilung zweier Geraden wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$am.b'm' + \lambda.am + \mu.b'm' + \nu = 0,$$

worin a und b' zwei resp. auf den beiden Geraden genommene beliebige feste Punkte bedeuten (§. 86). Wenn die beiden Geraden in dieselbe Richtung fallen, so kann man für b' den Punkt a nehmen, und alsdann wird die Gleichung:

$$am.am' + \lambda.am + \mu.am' + \nu = 0.$$

Sollen die beiden homologen Punkte m, m' zusammenfallen, so bestimmt man ihre gemeinschaftliche Lage durch die Gleichung:

$$(am)^2 + (\lambda + \mu)am + \nu = 0,$$

welche zwei Werthe für am gibt, so daß es also zwei Punkte, und nicht mehr gibt, welche der Aufgabe genügen. — Wir werden diese beiden merkwürdigen Punkte Doppelpunkte nennen, um anzudeuten, daß jeder deeselben zwei zusammenfallende homologe Punkte darstellt, welche auch imaginär sein können.—

§. 100. Die Mitte zweier Doppelpunkte ist die Mitte der beiden Punkte, welche in den beiden Theilungen unendlich entfernten Punkten entsprechen. —

Denn es sei J der Punkt der ersten Theilung, welcher dem unendlich entfernten Punkte der zweiten entspricht, und J' der Punkt der zweiten Theilung, welcher dem unendlich entfernten der ersten entspricht; so nimmt die Gleichung folgende Form an (§. 87):

$$am.am' - aJ'.am - am' + aJ.aa' = 0,$$

und wenn die beiden Punkte m, m' zusammenfallen, so hat man:

$$(am)^2 - (aJ + aJ')am + aJ.aa' = 0.$$

Die Summe der Abstände des Punktes a von den beiden

Doppelpunkten iſt alſo $= aJ + aJ'$, woraus erhellet: daß der Mittelpunkt der beiden Doppelpunkte mit dem der beiden Punkte J, J' zuſammenfällt. —

Bezeichnet O dieſen Mittelpunkt, ſo hat man:

$$aO = \frac{aJ + aJ'}{2},$$

und die Gleichung, welche die beiden Doppelpunkte beſtimmt, wird:

$$(am)^2 - 2aO \,.\, am + aJ \,.\, aa = 0.$$

§. 101. Das Verhältniß der Entfernungen eines Punktes der erſten Theilung von den beiden Doppelpunkten ſteht zu dem Verhältniſſe der Entfernungen des entſprechenden Punktes der zweiten Theilung von denſelben beiden Punkten in einem conſtanten Verhältniſſe. —

Denn es ſeien e, f zwei Punkte der erſten Theilung und e', f' die homologen in der zweiten, ſo wird die Homographie beider Theilungen ausgedrückt durch die Gleichung (§. 76):

$$\frac{em}{fm} = \lambda \,.\, \frac{e'm'}{f'm'},$$

und wenn man für e, f die beiden Doppelpunkte nimmt, welche mit ihren homologen zuſammenfallen; ſo wird dieſe Gleichung:

$$\frac{em}{ef} = \lambda \,.\, \frac{em'}{fm'},$$

wodurch der Satz bewieſen iſt. —

Man überzeugt ſich leicht, daß in den beiden durch dieſe Gleichung ausgedrückten homographiſchen Theilungen die beiden Punkte e, f Doppelpunkte ſind. Denn wenn man annimmt, daß der Punkt m mit e zuſammenfällt, ſo iſt $me = 0$, und folglich auch $m'e = 0$, d. h. m' fällt auch mit e zuſammen, woraus folgt, daß e ein Doppelpunkt iſt; und ebenſo für f.

Wenn die Conſtante $\lambda = -1$ iſt, ſo theilen die beiden Punkte m, m' das Segment ef harmoniſch (§. 34).

§. 102. Conſtruction der beiden Doppelpunkte. — Dieſe beiden Punkte werden durch die Gleichung:

$$(am)^2 - 2aO \,.\, am + aJ \,.\, aa' = 0$$

bestimmt, und da der Anfangspunkt a willkürlich ist; so wollen wir denselben in den Punkt O verlegen, zu welchem Zwecke man nur $a\,O = 0$ zu setzen braucht, wodurch die Gleichung wird:

$$(Om)^2 + OJ \,.\, OO' = 0,$$

wo O' der Punkt ist, welcher in der zweiten Theilung dem Punkte O der ersten entspricht. Da O die Mitte von JJ' ist, so ist $OJ = -OJ'$, und mithin:

$$(Om)^2 - OJ' \,.\, OO' = 0,$$

woraus folgt:

$$Om = \pm \sqrt{OJ' \,.\, OO'}.$$

Die beiden Doppelpunkte liegen also zu beiden Seiten des Punktes O in gleichen Entfernungen $= \sqrt{OJ', OO'}$, so daß sich ihre Bestimmung auf die Construction einer mittleren Proportionale zwischen zwei Linien reducirt. —

Wenn die beiden Punkte $O'J'$ nicht auf derselben Seite des Punktes O liegen, so haben die beiden Segmente OO', OJ' entgegengesetzte Zeichen, ihr Produkt ist also negativ, und die beiden Doppelpunkte sind imaginär. *)

§. 103. Wenn der eine Doppelpunkt in unendlicher Entfernung liegt, so sind die beiden Theilungen ähnlich oder proportional; denn wenn z. B. der Doppelpunkt f in unendlicher Entfernung liegt, so geht die allgemeine Gleichung:

$$\frac{em}{fm} = \lambda \,.\, \frac{em'}{fm'}$$

in folgende über:

$$\frac{em}{em'} = \lambda,$$

welche zwei ähnliche oder proportionale Theilungen ausdrückt (§. 77.)

---

*) Die beiden imaginären Doppelpunkte liegen aber nicht mehr auf der ursprünglichen Geraden, sondern auf der im Punkte O auf dieser errichteten senkrechten Geraden. (Vergl. die Anmerk. zu §. 55).

§. 104. Construction des Doppelpunktes e. — Wenn der Coefficient λ gegeben ist, so ist zur Bestimmung des Doppelpunktes e ein einziges System zweier homologer Punkte a, a' hinreichend, weil $\frac{ae}{a'e} = \lambda$ ist.

Wenn die beiden Theilungen durch zwei Paare homologer Punkte a, a' und b, b' bestimmt werden, so hat man für zwei beliebige andere homologe Punkte m, m' die Relation:

$$\frac{am}{a'm'} = const. = \frac{ab}{a'b'},$$

und zur Bestimmung des Doppelpunktes die Gleichung:

$$\frac{ae}{a'e} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Um den Doppelpunkt e zu construiren, nehme man auf zwei durch die Punkte a, a' gezogenen Parallelen zwei Segmente $a\mathfrak{E} = ab$, $a'\mathfrak{E}' = a'b'$, in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne, jenachdem ab und $a'b'$ gleiche, oder verschiedene Zeichen haben; so bestimmt die Gerade $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$, den Punkt e.

Oder: Man beschreibe über den beiden Segmenten $ab', a'b$ zwei durch denselben beliebigen Punkt g gehende Kreise, so schneiden sich dieselben in einem zweiten Punkte g', und die gemeinschaftliche Sehne gg' geht durch den Punkt e. Denn die Gleichung:

$$\frac{ae}{a'e} = \frac{ab}{a'b'}$$

gibt:

$$\frac{ae}{ae-be} = \frac{ae}{a'e-b'e};$$

folglich:

$$\frac{ae}{be} = \frac{a'e}{b'e} \text{ oder } ea \cdot eb' = ea' \cdot eb,$$

woraus erhellet, daß der Punkt e auf der gemeinschaftlichen Sehne der um die beiden Segmente $ab', a'b$ beschriebenen Kreise liegt. —

§. 105. Wenn $\frac{em}{em'} = \lambda = -1$ ist, so liegt der Doppel-

punkt in der Mitte jedes von zwei homologen Punkten m, m' bestimmten Segmentes, so daß beide Theilungen dieselben, aber in entgegengesetztem Sinne gemacht sind.

Wenn $\lambda = \frac{em}{em'} = +1$ ist, so liegt der Punkt e in unendlicher Entfernung, so daß die beiden Doppelpunkte in unendlicher Entfernung zusammenfallen.

Alsdann hat man:

$$\frac{ab}{a'b'} = 1, \quad ab = a'b',$$

woraus erhellet: daß die beiden homologen Segmente gleich und von einerlei Sinn sind, und man kann also sagen: daß die beiden Theilungen gleich und von demselben Sinne sind.

§. 106. Verschiedene Ausdrucksweisen zweier homographischer Theilungen auf derselben Geraden. — Zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden können durch eine Gleichung wie:

$$(1) \qquad am.b'm' + \lambda\,(am - b'm') + \nu = 0$$

ausgedrückt werden, worin die Coefficienten der beiden Segmente am, $b'm'$ gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. —

Um diese Gleichung zu erhalten, kann man entweder den Punkt a beliebig annehmen und den Punkt b', so wie die Constante λ bestimmen, oder man kann diese Constante annehmen und die beiden Punkte a, b' bestimmen. Denn die allgemeine Gleichung ist nach §. 87:

$$am.b'm' - b'J'.am - aJ.b'm' + aJ.b'a' = 0,$$

und wenn der Punkt a gegeben ist; so braucht man den Punkt b' nur so anzunehmen, daß $b'J' = -aJ$ ist. — Diese Relation zeigt, daß die beiden Punkte a, b' resp. von den beiden Punkten J, J' gleichweit entfernt sind, und beide auf dem Segmente JJ', oder beide außerhalb desselben liegen. —

Wenn die Constante λ gegeben ist, so nimmt man die Punkte a, b' resp. in einer Entfernung $= \lambda$ von den Punkten J, J'; aber

Digitized by Google

ſo, daß die beiden Segmente $aJ, b'J'$ entgegengeſetzte Zeichen haben. —

§. 106. Zwei homographiſche Theilungen auf derſelben Geraden werden auch durch die Gleichung:

$$(2) \qquad am \cdot b'm' + \gamma \cdot mm' + \delta = 0$$

ausgedrückt. — Denn nimmt man den Punkt b' auf die eben angegebene Weiſe an, ſo hat man die Gleichung:

$$am \cdot b'm' + aJ \cdot am - aJ' \cdot b'm' + aJ \cdot b'a' = 0,$$

und wenn man im dritten Gliede $am' - ab'$ für $b'm'$ ſetzt:

$$am \cdot b'm' + aJ\,(am - am') + aJ\,(ab' + a'b') = 0$$

oder:

$$(2') \qquad am \cdot b'm' - aJ\,mm' + aJ \cdot aa' = 0,$$

was den Satz beweiſ't. —

Wenn der Punkt a mit einem der Doppelpunkte e zuſammenfällt, ſo fällt der Punkt b' in den andern Doppelpunkt f, es iſt das Segment $aa' = 0$ und die Gleichung wird:

$$(3) \qquad em \cdot fm' - eJ \cdot mm' = 0$$

Wenn der Punkt a die Mitte O der beiden Punkte J, J' iſt, ſo fällt der Punkt b' wegen $b'J' = -aJ$ auch mit O zuſammen, und die Gleichung wird:

$$(4) \qquad Om \cdot Om' - OJ \cdot mm' + OJ \cdot OO' = 0,$$

wo O' der Punkt der zweiten Theilung iſt, welcher dem Punkte O der erſten entſpricht. —

§. 107. Zwei homographiſche Theilungen auf derſelben Geraden werden ferner durch die Gleichung:

$$(5) \qquad (Om)^2 + Jm \cdot mm' + \nu = 0,$$

wo ν eine Conſtante iſt, ausgerückt. — Denn wenn man in der vorhergehenden Gleichung $Om + mm'$ für Om' ſetzt, ſo kommt:

$$(Om)^2 + (Om - OJ)\,mm' + OJ \cdot OO' = 0,$$

oder:

(5') $$(Om)^2 + Jm \,.\, mm' + OJ \,.\, OO' = 0.$$

§. 108. Bedingung, daß zwei Doppelpunkte zuſammen fallen. — Da die homographiſche Theilung durch die Gleichung:

$$am \,.\, am' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, am' + \nu = 0$$

ausgedrückt wird, ſo werden die beiden Doppelpunkte durch die Relation:

$$(am)^2 + (\lambda + \mu)\, am + \nu = 0$$

beſtimmt, und die Bedingung der Gleichheit ihrer Wurzeln iſt:

$$(\lambda + \mu)^2 - 4\nu = 0.$$

Setzt man ferner für die Conſtanten ihre geometriſchen Ausdrücke:

$$\lambda = -aJ', \mu = -aJ, (\S.\ 87)$$

ſo hat man:

$$\lambda + \mu = -(aJ + aJ') = -2aJ,$$

wo O die Mitte des Segmentes JJ' iſt. — Es iſt alſo $\nu = (aO)^2$, und die den Doppelpunkt beſtimmende Gleichung wird:

$$(am)^2 - 2aO \,.\, am + (aO)^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$am = aO.$$

Die beiden Doppelpunkte fallen alſo in O, d. h. in der Mitte der beiden Punkte J, J', deren homologe in unendlicher Entfernung liegen, zuſammen, und die Homographie wird durch die Gleichung:

(a) $$am \,.\, am' - aJ' \,.\, am - aJ \,.\, am' + (aO)^2 = 0$$

ausgedrückt.

In dieſer Gleichung iſt der Punkt a willkürlich, und wenn man denſelben mit dem Punkte O zuſammenfallen läßt; ſo wird die Gleichung:

$$Om \,.\, Om' - OJ' \,.\, Om - OJ \,.\, Om' = 0,$$

oder wegen $OJ' = -OJ$:

(b) $$Om \cdot Om' - OJ \cdot mm' = 0.$$

Diese Gleichung ergibt sich auch aus (3), wenn man ausdrückt, daß die beiden Doppelpunkte e, f in O zusammenfallen, oder aus der Gleichung (4), wenn man darin das Segment $OO' = 0$ setzt. —

Aus der Gleichung (b) folgt: daß das Verhältniß $\frac{Om \cdot Om'}{mm'}$ constant ist. Für zwei homologe Punkte a, a' hat man folglich:

(b') $$\frac{Om \cdot Om'}{mm'} = \frac{Oa \cdot Oa'}{aa'}.$$

Diese Gleichung gibt:

$$\frac{Om' - Om}{Om \cdot Om'} = \frac{Oa' - Oa}{Oa \cdot Oa'},$$

oder:

(c) $$\frac{1}{Om} - \frac{1}{Om'} = \frac{1}{Oa} - \frac{1}{Oa'}.$$

Dieses ist der einfachste Ausdruck zweier homographischer Theilungen, deren beide Doppelpunkte zusammenfallen. —

Wenn man die Gleichung (c) so schreibt:

$$\frac{1}{Om} - \frac{1}{Oa} = \frac{1}{Om'} - \frac{1}{Oa'},$$

so ergibt sich daraus:

(d) $$\frac{Om}{am} \cdot Oa = \frac{Om'}{a'm'} \cdot Oa'.$$

Wenn man den Punkt a' in unendlicher Entfernung annimmt, so werden die beiden Gleichungen (c), (d):

(c') $$\frac{1}{Om} - \frac{1}{Om'} = \frac{1}{OJ},$$

(d') $$\frac{Om}{Jm} Oa = Om'.$$

§. 109. Wenn man in der Gleichung (b), $(Om + mm')$ für Om' setzt, so wird sie:

$$(Om)^2 + (Om - OJ)\, mm' = 0,$$

oder:

(e) $$(Om)^2 + Jm \,.\, mm' = 0.$$

Dieſe Gleichung ergibt ſich auch aus (5'), wenn man darin das Segment $OO' = 0$ ſetzt. —

§. 110. Wenn zwei Doppelpunkte in unendlicher Entfernung liegen. — In der Gleichung:

$$\frac{Om \,.\, Om'}{mm'} = \frac{Oa \,.\, Oa'}{aa'}$$

ſind a, a' zwei correſpondirende Punkte und O iſt der Punkt, worin die beiden Doppelpunkte zuſammenfallen (§. 108). Wird dieſer Punkt in unendlicher Entfernung angenommen, ſo wird $\frac{Om}{Oa} = \frac{Om'}{Oa'} = 1$ und die Gleichung:

$$mm' = aa'.$$

Das zwiſchen zwei correſpondirenden Punkten liegende Segment iſt alſo von conſtanter Größe, woraus folgt: daß $a'm' = am$ iſt; d. h. zwei homologe Segmente der beiden Geraden ſind ſtets einander gleich, oder: die beiden Geraden ſind in Theile getheilt, welche reſp. einander gleich und nach einerlei Sinn gerichtet ſind (§. 105). —

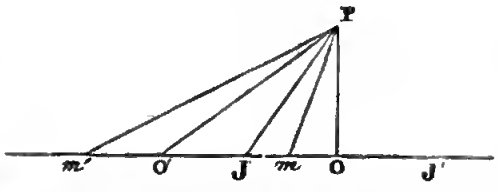
§. 111. Eigenſchaft zweier homographiſcher Theilungen, deren Doppelpunkte **imaginär** ſind. — Wenn zwei homographiſche Theilungen auf derſelben Geraden keine reellen Doppelpunkte haben, ſo gibt es zu beiden Seiten dieſer Geraden einen Punkt, von welchem aus alle Segmente zwiſchen den Punkten der erſten Theilung und ihren homologen der zweiten unter gleichen Winkeln erſcheinen. —

Die Homographie der beiden Theilungen wird ausgedrückt durch:

$Om \,.\, Om' - OJ \,.\, mm' + OJ \,.\, OO = 0$, (§. 106ª Gleichung (4))

oder:

$$Om \,.\, Om' - OJ \,.\, Om - OJ \,.\, Om' + OJ \,.\, OO' = 0.$$



Da die beiden Doppelpunkte nach der Voraussetzung imaginär sind, so liegen die beiden Punkte O', J' auf verschiedenen Seiten des Punktes O (§. 102) folglich O' und J auf derselben Seite von O, und das Produkt $OO' . OJ$ ist positiv. Auf dem in O errichteten Perpendikel nehme man die Länge:

$$OP = \sqrt{OJ . OO'} \text{ *)}$$

und schreibe die Gleichung so:

$$\frac{Om}{OP} \cdot \frac{Om'}{OP} + \frac{OJ}{OP}\left(\frac{Om}{OP} - \frac{Om'}{OP}\right) + 1 = 0,$$

also:

$$tang\, OPm . tang\, OPm' + \frac{OJ}{OP}(tang\, OPm - tang\, OP\, m') + 1 = 0,$$

oder:

$$\frac{tang\, OPm' - tang\, OPm}{1 + tang\, OPm . tang\, OPm'} = \frac{OP}{OJ}.$$

Der erste Theil dieser Gleichheit ist gleich:

$$tang\,(OPm' - OPm) = tang\, mPm'$$

und der zweite $= tang\, OJP$. Mithin hat man:

$$\angle\, mPm' = \angle\, OJP = const.$$ w. b. w. s.

§. 112. Der Punkt O ist die Mitte der beiden Doppelpunkte der beiden betrachteten homographischen Theilungen, und es ist $(OP)^2 = OO' . OJ'$ (§. 102) oder $= - OO' . OJ$, so daß diese imaginären Punkte nicht von der Größe des Winkels, unter welchem die Segmente aa', bb', cc', ... erscheinen, abhängen.

Hiernach hat man folgenden Lehrsatz:

Wenn man einen Winkel von constanter Größe sich um seinen Scheitel drehen läßt, so bestimmen seine bei-

*) Der Punkt P ist also einer der beiden imaginären Doppelpunkte; denn es ist $OP = \sqrt{OJ . OO'} = \sqrt{OJ' . OO} . \sqrt{-1}$.

den Schenkel auf einer festen Transversale zwei homographische Theilungen, deren **imaginäre** Doppelpunkte stets dieselben sind, welche Größe der sich drehende Winkel auch haben mag. —

Drei Segmente auf derselben geraden Linie aa', bb', cc' bestimmen zwei homographische Theilungen, indem a, b, c drei Punkte der ersten und a', b', c' die entsprechenden Punkte der zweiten sind. Wenn die Doppelpunkte dieser beiden Theilungen imaginär sind, so gibt es zu beiden Seiten dieser Geraden einen Punkt P, von welchem aus die drei Segmente unter gleichen Winkeln erscheinen. — Aus dem Vorhergehenden ergibt sich also eine sehr einfache Auflösung der Aufgabe:

Wenn auf derselben Geraden drei Segmente aa', bb', cc' gegeben sind, einen Punkt zu finden, von welchem aus alle drei unter demselben Winkel erscheinen. —

§. 113. Besonderer Fall zweier homographischer Theilungen auf derselben Geraden. — Wenn in der allgemeinen Gleichung:

$$am \cdot am' + \lambda \cdot am + \mu\, am' + \nu = 0, \quad (\S.\ 99)$$

die beiden Coefficienten λ, μ gleich und von demselben Zeichen sind, so sind die beiden Theilungen nicht mehr allgemein, und haben die besondere Eigenschaft: daß ein beliebiger Punkt m, als der ersten oder zweiten Theilung angehörig betrachtet, in der zweiten oder ersten Theilung stets denselben homologen Punkt m' hat. —

Denn die Gleichung wird alsdann:

$$am \cdot am' + \lambda (am + am') + \nu = 0,$$

worin die beiden Segmente am, am' symmetrisch vorkommen, also die Gleichung nicht gestört wird, wenn man am und am' gegenseitig vertauscht, was beweist, daß, wenn der Punkt m als der zweiten Theilung angehörig betrachtet wird, derselbe den Punkt m' in der ersten Theilung zum homologen hat. —

Umgekehrt: Wenn diese Eigenthümlichkeit für einen beliebigen Punkt stattfindet, so sind die beiden Coefficienten λ, μ gleich

und von einerlei Zeichen, und ſie findet folglich auch für jeden andern Punkt ſtatt. —

Denn es ſei m ein Punkt, welcher als der erſten Theilung angehörig betrachtet, in der zweiten den Punkt m' zum homologen Punkte hat, und als der zweiten Theilung angehörig betrachtet, in der erſten denſelben Punkt m' zum homologen hat; ſo hat man die beiden Gleichungen:

$$am \,.\, am' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, am' + \nu = 0,$$
$$am' \,.\, am + \lambda \,.\, am' + \mu \,.\, am + \nu = 0,$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$\lambda\ (am - am') + \mu\ (am' - am) = 0,$$

oder:

$$(\lambda - \mu)\, m'm = 0, \text{ alſo } \lambda = \mu,$$

weil die beiden Punkte m, m' nicht zuſammenfallen. —

§. 114. Homographiſche Büſchel, welche denſelben Mittelpunkt haben. — Doppelſtrahlen. — Was vorhin von zwei Doppelpunkten zweier homographiſcher Theilungen auf derſelben Geraden geſagt iſt, muß ſich auch auf zwei Doppelſtrahlen zweier homographiſcher Büſchel von demſelben Mittelpunkte anwenden laſſen. — Es gibt nämlich in den beiden Büſcheln zwei Strahlen, wovon jeder, als dem erſten oder zweiten Büſchel angehörig betrachtet, denſelben homologen in dem zweiten oder erſten Büſchel hat, und dieſe Strahlen nennen wir Doppelſtrahlen der beiden Büſchel. — Denn wenn man irgend eine Transverſale zieht, ſo beſtimmen die beiden Büſchel auf dieſer Geraden zwei homographiſche Theilungen mit zwei Doppelpunkten, welchen die beiden Doppelſtrahlen der beiden Büſchel entſprechen. —

Wenn E, F dieſe beiden Doppelſtrahlen bezeichnen, ſo kann man nach §. 92 die Homographie durch die Gleichung:

$$\frac{\sin(E,M)}{\sin(F,M)} = \lambda \,.\, \frac{\sin(E,M')}{\sin(F,M')}$$

ausdrücken. Wenn die beiden Doppelſtrahlen aufeinander ſenkrecht ſind, ſo wird dieſe Gleichung:

$$tang\ (E,M) = \lambda\ tang\,(E,M').$$

Wir wollen annehmen, daß in der allgemeinen Gleichung in §. 97 die beiden willkürlichen Strahlen B', D' reſp. mit A, C zuſammenfallen, und es ſeien J, J' die beiden Strahlen, welche in dem erſten und zweiten Büſchel demſelben Strahle C entſprechen, welcher ſucceſſive als dem zweiten und erſten angehörig betrachtet wird, ſo daß man J und J' reſp. für D und C' ſetzen muß; ſo wird die Gleichung:

$$\frac{\sin(A,M)}{\sin(C,M)} \cdot \frac{\sin(A,M')}{\sin(C',M')} - \frac{\sin(A,J')}{\sin(C,J')} \cdot \frac{\sin(A,M)}{\sin(C,M)}$$

$$- \frac{\sin(A,J)}{\sin(C,J)} \cdot \frac{\sin(A,M')}{\sin(C,M')} + \frac{\sin(A,J)}{\sin(C,J)} \cdot \frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')} = 0.$$

Die Doppelſtrahlen der beiden Büſchel werden durch die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\sin(A,M)}{\sin(C,M)}\right]^2 - \left[\frac{\sin(A,J)}{\sin(C,J)} + \frac{\sin(A,J')}{\sin(C,J')}\right] \frac{\sin(A,M)}{\sin(C,M)} \\ + \frac{\sin(A,J)}{\sin(C,J)} \cdot \frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')} = 0 \end{aligned}\right\} (\nu)$$

beſtimmt. —

Die beiden Strahlen A, C ſind willkürlich, ſo daß der zweite auf dem erſten ſenkrecht ſein kann, und alsdann wird die Homographie ausgedrückt durch die Gleichung:

$$tang(A,M) \cdot tang(A,M') - tang(A,J') \cdot tang(A,M)$$

$$- tang(A,J) \cdot tang(A,M') + tang(A,A') \cdot tang(A,J) = 0.$$

Die beiden Doppelſtrahlen werden durch folgende Gleichung beſtimmt:

$$tang^2(A,M) - tang(A,M)\,[tang(AJ,) + tang(A,J')]$$

$$+ tang(A,A')\,tang(A,J) = 0.$$

Wenn man für die Gerade A ihr Perpendikel C ſetzt, ſo wird die Homographie ausgedrückt durch die Gleichung:

$$cotg(C,M) \cdot cotg(C,M') - cotg(C,J')\,cotg(C,M)$$

$$- cotg(C,J)\,cotg(C,M') + cotg(C,J)\,cotg(C,A') = 0.$$

Hier ist C eine beliebige feste Gerade, welche als Strahl des ersten Büschels betrachtet, in dem zweiten J' zum homologen Strahle hat, und als Strahl des zweiten Büschels betrachtet, hat sie in dem ersten J zum homologen Strahle. Ferner ist A' in dem zweiten Büschel der homologe Strahl von dem Perpendikel der Geraden C in dem ersten Büschel.—

Die Doppelstrahlen werden durch folgende Gleichung bestimmt:

$$cotg^2(C,M) - [cotg(C,J) + cotg(C,J')]\,cotg(C,M) + cotg(C,J)\,cotg(C,A') = 0.$$

§. 115. Wenn sich ein Winkel (A,A') von constanter Größe um seinen Scheitel drehet und so zwei Strahlenbüschel erzeugt, so sind die Doppelstrahlen derselben offenbar imaginär, und werden durch die allgemeine Gleichung (ν) bestimmt, welche sich aber hier vereinfacht, weil:

$$\angle(C,J) = -\angle(A,A'),\ \angle(C,J') = \angle(A,A'),$$
$$\angle(A,J) = -\angle(C,A'),\ \angle(C,J) = -\angle(A,A')$$

ist, und die Gleichung wird:

$$\left[\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)}\right]^2 - \frac{sin(A,J') - sin(A,J)}{sin(A,A')} \cdot \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} + 1 = 0.$$

Nun ist aber:

$$sin(A,J') - sin(A,J) = sin(A,C+C,J') - sin(A,C-J,C)$$
$$= sin(A,C+A,A') - sin(A,C-A,A') = 2\,cos(A,C)\,.\,sin(A,A');$$

folglich wird die Gleichung:

$$\left[\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)}\right]^2 - 2\,cos(A,C).\ \frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} + 1 = 0,$$

und ihre Wurzeln sind:

$$\frac{sin(A,M)}{sin(C,M)} = cos(A,C) \pm sin(A,C)\sqrt{-1}.$$

Das Produkt dieser Wurzeln ist $= +1$, welche Richtung die festen Axen A,C auch haben mögen; d. h. wenn E,F die imaginären Richtungen der beiden Doppelstrahlen der beiden Büschel bezeichnen, so hat man:

$$\frac{\sin(A,E)}{\sin(C,E)} \cdot \frac{\sin(A,F)}{\sin(C,F)} = +1,$$

und wenn C auf A ſenkrecht iſt:

$$(\alpha) \qquad tang\,(A,E) = \pm\sqrt{-1}.\text{*)}$$

Es iſt zu bemerken: daß dieſe Ausdrücke der imaginären Richtungen der Doppelſtrahlen der beiden Büſchel von der Größe des Winkels (A,A'), deſſen Schenkel die beiden Büſchel beſchreiben, unabhängig ſind.

Theorie der Involution.

§. 116. Involution von ſechs Punkten. — Relationen zwiſchen dieſen Punkten. — Wenn drei in derſelben Geraden liegende Paare conjugirter Punkte ſo beſchaffen ſind: daß das anharmoniſche Verhältniß von vier dieſer Punkte dem der vier conjugirten Punkte gleich iſt; ſo werden wir ſagen: daß die ſechs Punkte in Involution ſind oder eine Involution bilden. —

Sind z. B. $a,a';\ b,b';\ c,c'$ die drei Paare conjugirter Punkte und es iſt das anharmoniſche Verhältniß von vier dieſer Punkte, etwa a, b, c, c', dem der vier conjugirten Punkte a', b', c', c gleich;

---

*) Was der Verf. unter imaginären Richtungen objektiv, d. h. geometriſch, verſteht, wird ebenſo mit Stillſchweigen übergangen, wie früher die Frage nach der Lage imaginärer Punkte — er entwickelt blos den analytiſchen Ausdruck — ohne ſich um deſſen geometriſche Bedeutung irgendwie zu kümmern — und nicht einmal in dem letzten ſpeciellen Falle wird die geometriſche Bedeutung der Formel (α) angegeben. — Nach der Gauß'ſchen Theorie kann man die Lage imaginärer Geraden ebenſowohl conſtruiren und beſtimmen, wie die imaginären Punkte. — Die Richtung der imaginären Doppelſtrahlen z. B. iſt durch die Lage der entſprechenden imaginären Doppelpunkte vollſtändig beſtimmt. — Aber auch die geometriſche Bedeutung der Formeln des Verfaſſers liegt nach der Gauß'ſchen Anſicht auf der Hand und aus (α) erhellet z. B.: daß die beiden imaginären Doppelſtrahlen in der durch A gelegten auf der Ebene der Figur ſenkrechten Ebene liegen und mit A unter und über der erſten Ebene Winkel von 45° bilden. (§. 62, Anmerk.) —

so bilden diese sechs Punkte eine Involution oder sind in Involution. —

Wenn das anharmonische Verhältniß von irgend vier der sechs Punkten $a, a'; b, b'; c, c'$, etwa a, b, c, c', dem der vier conjugirten Punkte a', b', c', c gleich ist; so ist dasselbe für jede vier andere dieser sechs Punkte und ihre vier conjugirten Punkte der Fall. —

Aus dem Systeme der vier betrachteten Punkte a, b, c, c' wird ein anderes System abgeleitet, wenn man entweder einen der Punkte c, c' in a' oder b' verwandelt, oder einen der Punkte a, b in seinen conjugirten.

1, Wenn man z. B. c' in a' umsetzt, so erhält man das System a, b, c, a', so wie das conjugirte System a', b', c', a, und es läßt sich leicht zeigen, daß die anharmonischen Verhältnisse dieser beiden Systeme einander gleich sind. — Denn da nach der Voraussetzung die anharmonischen Verhältnisse der beiden Systeme:

$$a,\ b,\ c,\ c'$$
$$a',\ b',\ c',\ c$$

einander gleich sind, so hat man:

$$\frac{c'c}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'},$$

und wenn man in beide Theile das Segment $a'a$ statt $c'c$ einführt:

$$\frac{a'c}{a'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{ac'}{aa'} : \frac{b'c'}{b'a'},$$

welche Gleichheit ausdrückt: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, a' dem der vier conjugirten Punkte a', b', c', a gleich ist. —

2, Wenn man einen der beiden Punkte a, b mit seinem conjugirten, etwa b mit b' vertauscht, so erhält man die beiden Systeme a, b', c, c'; a', b, c', c und es läßt sich leicht zeigen: daß ihre anharmonischen Verhältnisse gleich sind. — Denn die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse der beiden Systeme a, b, c, c' und a', b', c', c wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{ca'}{cb'},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{ca}{cb'} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{c'a'}{c'b} : \frac{ca'}{cb},$$

und unter dieser Form drückt die Gleichung aus: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b', c, c' dem der vier Punkte a', b, c', c gleich ist. —

§. 117. Wenn drei Punktepaare $a, a'; b, b; c, c'$ eine Involution bilden, so finden die folgenden sieben Gleichungen statt — und umgekehrt: jede dieser Gleichungen drückt die Involution aus, und hat die sechs übrigen Gleichungen zur Folge:

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'}, \\ \frac{bc \cdot bc'}{ba \cdot ba'} = \frac{b'c \cdot b'c'}{b'a \cdot b'a'}, \\ \frac{ca \cdot ca'}{cb \cdot cb'} = \frac{c'a \cdot c'a'}{c'b \cdot c'b'}; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} ab' \cdot bc' \cdot ca' = -a'b \cdot bc \cdot c'a, \\ ab' \cdot bc \cdot c'a' = -a'b \cdot b'c' \cdot ca, \\ ab \cdot b'c' \cdot ca' = -a'b' \cdot bc \cdot c'a, \\ ab \cdot b'c \cdot c'a' = -a'b' \cdot bc' \cdot ca. \end{cases}$$

Denn jede dieser Gleichungen läßt sich so schreiben, daß sie die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse von vier Paaren conjugirter Punkte ausdrückt. — Umgekehrt drückt also auch jede dieser Gleichungen aus: daß die sechs Punkte eine Involution bilden (§. 116), und hat die sechs andern Gleichungen zur Folge. —

Jede der Gleichungen (a) läßt sich auf zwei und jede der Gleichungen (b) auf drei Arten unter der Form der Gleichheit zweier anharmonischer Verhältnisse ausdrücken. — So kann z. B. die erste der Gleichungen (a) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{ab'}{ac'},$$

und drückt jetzt aus: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b, c, a' dem der vier conjugirten Punkte a', b', c', a gleich iſt. — Oder auch ſo:

$$\frac{ab}{ac'} : \frac{a'b}{a'c'} = \frac{a'b'}{a'c} : \frac{ab'}{ac},$$

welche Gleichung ebenfalls ausdrückt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b, c', a' dem der vier conjugirten Punkte a', b', c, a gleich iſt. —

Ebenſo kann man z. B. die zweite der Gleichungen (b), wenn man in beide Theile derſelben den Faktor aa' einführt, auf folgende Form bringen:

$$\frac{a'a}{a'b} : \frac{ca}{cb} = \frac{aa'}{ab'} : \frac{c'a'}{c'b'},$$

welche ausdrückt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b, c, a' dem der vier conjugirten Punkte a', b', c', a gleich iſt. —

Führt man ferner den Faktor bb' in dieſelbe Gleichung ein, ſo kann man ſie wieder ſo ſchreiben, daß ſie die Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe der vier Punkte a, b, c, b' und ihrer conjugirten a', b', c', b ausdrückt. —

Wenn man endlich den Faktor cc' in dieſe Gleichung einführt, ſo kann man ſie wieder auf eine Form bringen, welche unmittelbar ausdrückt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b', c, c' dem der vier conjugirten Punkte a', b, c', c gleich iſt. —

Die Bildungsweiſe der Gleichungen (a) mit acht Segmenten fällt leicht in die Augen — und um die Gleichungen (b) mit ſechs Segmenten zu bilden, nimmt man ein Segment, etwa aa, an, dann das Segment, welches zwiſchen dem conjugirten Punkte b' von b und einem der beiden Punkte des dritten Paares c, c', etwa c liegt, alſo das Segment $b'c$, und endlich das Segment, welches zwiſchen dem conjugirten Punkte c' von c und dem conjugirten Punkte a' des erſten Paares a, a' liegt. Das Produkt $ab \,.\, b'c \,,\, c'a'$ dieſer drei Segmente bildet den erſten Theil der Gleichung, und um den zweiten Theil derſelben zu bilden, braucht man nur das Zeichen

und die Accente des ersten Theiles zu verändern, d. h. man läßt die Accente der Buchstaben, welche solche haben, hinweg, und gibt denen Accente, welche keine haben, wodurch man — $a'b' . b'c . ca$ als zweiten Theil der Gleichung erhält. —

§. 118. Wenn zwei Segmente so liegen, daß das eine zum Theil auf das andere und zum Theil außerhalb desselben fällt; so wollen wir der Kürze wegen sagen: daß sie in einander eingreifen. —

Wenn drei Segmente $aa', bb_{,}, cc'$ in Involution sind, und eins derselben greift in ein anderes ein; so greift es auch in das dritte ein. —

Denn wenn z. B. aa' in bb' eingreift, so liegt einer der beiden Punkte a, a' auf dem Segmente bb' und der andere außerhalb desselben; mithin haben die beiden Produkte $ab . ab', a'b . a'b'$ verschiedene Zeichen, folglich haben wegen der ersten der Gleichungen (b) auch die Produkte $ac . ac', a'c . a'c'$ verschiedene Zeichen, was zeigt: daß einer der beiden Punkte a, a' auf dem Segmente cc' und der andere außerhalb desselben liegt, also das Segment aa' in cc' eingreift. —

Hieraus folgt von selbst: wenn das Segment aa' nicht in bb' eingreift, so greift es auch nicht in cc' ein. —

§. 119. Besondere Fälle der Involution von sechs Punkten. — Wenn die vier Punkte $a, a'; b, b'$ gegeben sind, so kann der Punkt c beliebig angenommen werden, und die Lage seines conjugirten Punktes c' wird alsdann durch eine der sieben Gleichungen $(a), (b)$ bestimmt. — Es können deshalb zwei besondere Fälle vorkommen, in welchen die Involutionsbeziehungen zwischen fünf, statt zwischen sechs Punkten, stattfinden, nämlich wenn der Punkt c in unendliche Entfernung, oder auf seinen conjugirten Punkt c' fällt. —

I. Nehmen wir den Punkt c in unendlicher Entfernung an, und bezeichnen seinen conjugirten Punkt c' mit O; so werden die Gleichungen:

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{ab\,.\,ab'}{a'b\,.\,a'b'} = \dfrac{aO}{a'O}, \\ \dfrac{ba\,.\,ba'}{b'a\,.\,b'a'} = \dfrac{bO}{b'O}, \\ Oa\,.\,Oa' = Ob\,.\,Ob', \\ \dfrac{Oa}{Ob} = \dfrac{ab}{ba'}, \quad \dfrac{Oa'}{Ob'} = \dfrac{a'b}{b'a}, \\ \dfrac{Oa}{Ob} = \dfrac{ab}{b'a'}, \quad \dfrac{Oa'}{Ob} = \dfrac{a'b'}{ba}. \end{cases}$$

Es läßt ſich leicht direkt zeigen: daß jede dieſer Gleichungen ausdrückt: daß der Punkt O mit den beiden Paaren $a,a';b,b'$ eine Involution bildet, worin der conjugirte dieſes Punktes O in unendlicher Entfernung liegt, und daß jede dieſer Gleichungen alle übrigen zur Folge hat. — Nehmen wir z. B. die drei Gleichungen von verſchiedener Form:

$$(1)\qquad Oa\,.\,Oa' = Ob\,.\,Ob',$$

$$(2)\qquad \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba},$$

$$(3)\qquad \frac{ab\,.\,ab'}{a'b\,.\,a'b'} = \frac{Oa}{Oa'};$$

ſo läßt ſich die erſte ſo ſchreiben:

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Ob'}{Oa'},$$

oder wenn ∞ den in unendlicher Entfernung liegenden Punkt bezeichnet:

$$\frac{Oa}{Ob} : \frac{\infty a}{\infty b} = \frac{\infty a'}{\infty b'} : \frac{Oa'}{Ob'}.$$

Dieſe Gleichung zeigt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a,b,O,∞ dem der vier Punkte a',b',∞,O gleich iſt und daß folglich die drei Punktepaare $a,a';b,b';O,\infty$, eine Involution bilden. — Man hat alſo:

$$(4)\qquad \frac{\infty O}{\infty a} : \frac{bO}{ba} = \frac{O\infty}{Oa} : \frac{b'\infty}{b'a'},$$

oder weil $\frac{\infty O}{\infty a} = 1 = \frac{\infty O}{\infty b'}$ ist.

$$\frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba},$$

welches die Gleichung (2) ist. —

Um die Gleichung (3) zu erhalten, wollen wir in der Gleichung (4) für den gemeinschaftlichen Faktor ∞O beider Theile das Segment aa' setzen, so kommt:

$$\frac{a'O}{a'a} : \frac{bO}{ba} = \frac{a\infty}{aa'} : \frac{b'\infty}{b'a'}.$$

Diese Gleichheit zeigt: daß die vier Punkte a, b, O, a' dasselbe anharmonische Verhältniß haben, als die vier Punkte a', b', ∞, a; man hat also auch die Gleichheit:

$$\frac{ab}{aO} : \frac{a'b}{a'O} = \frac{a'b'}{a'\infty} : \frac{ab'}{a\infty},$$

oder wegen $\frac{a\infty}{a'\infty} = 1$:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{aO}{a'O},$$

welches die Gleichung (3) ist. —

Man kann die Gleichungen auch direkt auseinander ableiten, ohne anharmonische Verhältnisse zu Hülfe zu nehmen. — Denn die Gleichung (1) kann man so schreiben:

$$\frac{Oa'}{Ob} = \frac{Ob}{Oa},$$

woraus folgt:

$$\frac{Oa'}{Ob' - Oa'} = \frac{Ob}{Ob - Oa} \text{ oder } \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba},$$

welches die Gleichung (2) ist. —

Ebenso hat man:

$$\frac{Oa'}{Ob'} = \frac{a'b}{b'a};$$

folglich durch Multiplikation:

$$\frac{(Oa')^2}{Ob \cdot Ob'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{ab \cdot ab'};$$

aber wegen $Ob \cdot Ob = Oa \cdot Oa'$ reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\frac{Od}{Oa'} = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'},$$

welches die Gleichung (3) ist. —

Umgekehrt kann man auch von der Gleichung (2) zu der Gleichung (1) gelangen; denn (2) läßt sich so schreiben:

$$\frac{Oa'}{a'b'} = \frac{Ob}{ba} \text{ oder } \frac{Oa'}{Ob' - Oa'} = \frac{Ob}{Oa - Ob},$$

folglich:

$$\frac{Oa'}{Ob'} = \frac{Ob}{Oa} \text{ oder } Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'.$$

Ferner kann man leicht die Existenz der Gleichung (1) aus (3) nachweisen; denn wenn (1) nicht stattfände, so könnte man einen Punkt Q bestimmen, welcher der Gleichung;

$$Qa \cdot Qa' = Qb \cdot Qb'$$

genügt, woraus folgt:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{Qa}{Qa'};$$

folglich ist $\frac{Qa}{Qa'} = \frac{Oa}{Oa'}$. Der Punkt Q ist also mit O identisch, mithin die Gleichung (1) eine Folge aus (3), woraus sich folglich auch (2) ergibt:

§. 120. Die Gleichung $Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$ zeigt: daß, wenn die beiden Punkte a, a' auf derselben Seite des Punktes O liegen, in welchem Falle die beiden Segmente Oa, Oa' einerlei Zeichen haben, dasselbe auch mit den beiden Punkten b, b' der Fall ist — und wenn a, a' auf verschiedenen Seiten von O liegen, so gilt dasselbe auch von b, b'. — Wenn also die beiden Segmente aa', bb' in einander eingreifen, so liegt der Punkt O nothwendig auf ihrem gemeinschaftlichen Theile; denn wenn er außer-

halb der beiden Segmente läge, so wäre eins der beiden Produkte größer, als das andere. — Wenn eins der beiden Segmente ganz auf das andere fällt, so liegt der Punkt O offenbar außerhalb beider — und wenn endlich beide Segmente keinen gemeinschaftlichen Theil haben; so liegt der Punkt O zwischen ihnen. Denn er kann nicht auf einem derselben liegen, weil alsdann die beiden Produkte nicht dasselbe Zeichen hätten — und er kann auch nicht diesseits oder jenseits beider Segmente liegen, weil in diesem Falle eins der beiden Produkte größer wäre, als das andere. —

§. 121. II. Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Punkte c, c', welche mit a, a'; b, b' eine Involution bilden, in einen Punkt e zusammenfallen; so reduciren sich unsere sieben Gleichungen auf die vier folgenden:

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{ab\,.\,ab'}{a'b\,.\,a'b'} = \dfrac{(ae)^2}{(a'e)^2}, \\ \dfrac{ba\,.\,ba'}{b'a\,.\,b'a'} = \dfrac{(be)^2}{(b'e)^2}, \\ ab'\,.\,be'\,.\,ea' = -\,a'b\,.\,b'e\,.\,ea, \\ ab\,.\,b'e\,.\,ea' = -\,a'b'\,.\,be\,.\,ea. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen drückt aus: daß der Punkte mit den beiden Paaren a, a'; b, b' eine Involution bildet, worin der conjugirte dieses Punktes mit diesem selbst zusammenfällt. — Die Lage der Punkte, welche diese Eigenschaft haben, wird durch jede der vier obigen Gleichungen bestimmt, welche vom zweiten Grade sind, und folglich zwei Lagen des Punktes e geben. — Bezeichnen e, f diese beiden Punkte, so hat man:

$$\frac{ab\,.\,ab'}{a'b\,.\,a'b'} = \frac{(af)^2}{(a'f)^2};$$

folglich:

$$\frac{(ae)^2}{(a'e)^2} = \frac{(af)^2}{(a'f)^2} \text{ und } \frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f}.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung muß das Zeichen — haben, weil sonst die beiden Punkte e, f nothwendig zusammenfielen, was nicht der Fall ist. —

Ebenso hat man:

$$\frac{be}{b'e} = -\frac{bf}{b'f}.$$

Diese Relationen zeigen: daß die beiden Punkte, wovon jeder mit seinem conjugirten zusammenfällt, die beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen. — Da die Bestimmung dieser beiden Punkte von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt, so können sie imaginär sein, was der Fall ist, wenn die beiden Segmente aa', bb' in einander eingreifen (§. 36).

§ 121ª. Umgekehrt: Wenn zwei Punkte e, f zwei Segmente aa', bb' zugleich harmonisch theilen, so bildet jeder dieser Punkte mit den beiden Paaren a, a'; b, b' eine Involution, worin dieser Punkt sein eigener conjugirter ist. —

Denn nach §. 37 hat man:

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'}, \quad \frac{2}{ef} = \frac{1}{eb} + \frac{1}{eb'},$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{ea} - \frac{1}{eb} = -\left(\frac{1}{ea'} - \frac{1}{eb'}\right),$$

$$\frac{eb - ea}{ea \cdot eb} = -\frac{eb' - ea'}{ea' \cdot ea'},$$

$$\frac{ab}{ea \cdot eb} = -\frac{a'b'}{ea' \cdot eb'},$$

oder:

$$ab \cdot b'e \cdot ea' = -a'b' \cdot be \cdot ea,$$

welches eine der Gleichungen (d) ist. —

§. 122. Der Punkt e kann in unendlicher Entfernung liegen; alsdann werden die Gleichungen (d):

$$ab \cdot bb' = a'b \cdot a'b',$$

$$b'a \cdot ba' = b'a \cdot b'a',$$

$$ab = b'a', \; ab' = ba',$$

und der zweite Punkt f liegt in der Mitte jedes der beiden Segmente aa', bb'. Es läßt sich leicht zeigen: daß die beiden Punktepaare $a, a'; b, b'$ sowohl mit dem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte e oder ∞, als mit f eine Involution bilden. Denn die erste Gleichung z. B. kann so geschrieben werden:

$$\frac{ab}{a'b} : \frac{a\infty}{a'\infty} = \frac{a'b'}{ab'} : \frac{a'\infty}{a\infty},$$

woraus erhellet: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, a', b, ∞ dem der vier Punkte a', a, b', ∞ gleich ist. Die beiden Punktepaare $a, a'; b, b'$ und die beiden in unendlicher Entfernung zusammenfallenden Punkte bilden folglich eine Involution. —

Dasselbe gilt hinsichtlich des Punktes f; denn wegen $af = -a'f$ kann man dieselbe Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{ab}{a'b} : \frac{af}{a'f} = \frac{a'b'}{ab'} : \frac{a'f}{af},$$

woraus folgt: daß die vier Punkte a, a', b, f dasselbe anharmonische Verhältniß haben, als die vier Punkte a', a, b', f, und daß folglich die beiden Punktepaare $a, a'; b, b'$ und die beiden in f zusammenfallenden Punkte eine Involution bilden. —

§. 123. Eigenschaften von sechs Involutionspunkten. — Centralpunkt. — Doppelpunkte. — Wenn sechs Punkte $a, a'; b, b'; c, c'$ in Involution sind, und man nimmt zwei andere Punkte d, d' an, welche mit den beiden ersten Paaren $a, a'; bb'$ eine Involution bilden; so bilden dieselben Punkte d, d' auch mit dem dritten Paare c, c' und einem der beiden ersten Paare eine Involution. —

Denn da die drei Punktepaare $a, a'; b, b'; c, c'$ eine Involution bilden, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, b', c dem der vier Punkte a', b', b, c' gleich, was durch die Gleichheit:

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{cb}{cb'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{c'b'}{c'b}$$

ausgedrückt wird. —

Desgleichen, da die drei Punktepaare $a, a; b, b'; d, d'$ in Involution sind, so hat man:

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{db}{db'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{d'b'}{d'b}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich folgende:

$$\frac{cb}{cb'} : \frac{db}{db'} = \frac{c'b'}{c'b} : \frac{d'b'}{d'b},$$

welche lehrt: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte b, b', c, d dem der vier Punkte b', b, c', d' gleich ist — und mithin bilden die drei Punktepaare $b, b'; c, c'; d, d'$ eine Involution. —

§. 124. Der durch die Gleichung:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

bestimmte Punkt O bildet mit den vier Punkten $a, a'; b, b'$ eine Involution, in welcher der conjugirte dieses Punktes O in unendlicher Entfernung liegt (§. 119), und nach dem eben bewiesenen Satze hat dieser Punkt in Beziehung auf die beiden Punktepaare $b, b'; c, c'$ dieselbe Eigenschaft, so daß man auch die Gleichung hat:

$$Ob : Ob' = Oc \cdot Oc'$$

und mithin den Lehrsatz:

Wenn drei Punktepaare in Involution sind, so gibt es immer einen gewissen Punkt, dessen Abstände von zwei beliebigen conjugirten Punkten ein constantes Produkt geben. —

Wir wollen diesen merkwürdigen Punkt den Centralpunkt der Involution nennen. — Da derselbe mit zwei beliebigen der drei Punktepaare eine Involution bildet, in welcher sein conjugirter Punkt in unendlicher Entfernung liegt; so finden zwischen diesem Punkte und irgend zwei der drei Involutionspaare auch die Gleichungen (c) in §. 119 statt. —

Umgekehrt: Wenn drei Punktepaare $a, a'; b, b' c, c'$ den Relationen:

$$(e) \qquad Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc'$$

genügen, so bilden dieselben eine Involution. —

Denn wenn der Punkt c' mit den fünf Punkten a, a', b', b', c keine Involution bildete, so gäbe es nach dem Vorhergehenden

einen andern Punkt c'', für welchen dies der Fall wäre, und man hätte dann zugleich die beiden Relationen:

$$Oa \,.\, Oa' = Oc \,.\, Oc',$$
$$Oa \,.\, Oa' = Oc \,.\, Oc'',$$

woraus folgt:

$$Oc'' = Oc'.$$

Mithin ſind die ſechs Punkte a,a'; $b'b'$; c,c' in Involution. —

Oder: Die Gleichungen:

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob',$$
$$Ob \,.\, Ob = Oc \,.\, Oc',$$
$$Oc \,.\, Oc' = Oa \,.\, Oa'$$

geben reſp.:

$$\frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'}\,,\quad \frac{Ob'}{Oc'} = \frac{b'c}{c'b}\,,\quad \frac{Oc}{Oa} = \frac{c'a'}{ac},$$

und wenn man dieſe drei letzten Gleichheiten in einander multiplicirt; ſo erhält man die Gleichheit:

$$ab \,.\, b'c \,.\, c'a' = -\, a'b' \,.\, bc' \,.\, ca,$$

welche ausdrückt: daß die ſechs Punkte a,a'; b,b'; c,c' in Involution ſind. —

Aus den Gleichungen (e) laſſen ſich auch die Involutionsgleichungen mit acht Segmenten (§. 117) herleiten. — Denn aus:

$$\frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'}\,,\quad \frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'}$$

folgt:

$$\frac{(Oa)^2}{Ob \,.\, Ob'} = \frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'},$$

und ebenſo hat man:

$$\frac{(Oa)^2}{Oc \,.\, Oc'} = \frac{ac \,.\, ac'}{a'c \,.\, a'c'}.$$

Nun iſt aber:

$$Ob \,.\, Ob' = Oc \,.\, Oc';$$

folglich:

$$\frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'} = \frac{ac \;\; ac'}{a'c \,.\, a'c'},$$

welches eine der Gleichungen (*a*) mit acht Segmenten ist.

§. 125. Durch die Eigenschaft des Centralpunktes wird das System von sechs Involutionspunkten auf eine sehr einfache Weise charakterisirt. Dennoch scheint uns diese Eigenschaft zur Definition der Involution nicht die passendste zu sein, weil sie auf der Betrachtung eines Punktes beruht, der nicht zu dem Systeme der sechs Punkte gehört, deren gegenseitige Beziehungen ausgedrückt werden sollen, während durch den Begriff des anharmonischen Verhältnisses diese Beziehungen unmittelbar ausgedrückt werden, indem man blos diese sechs Punkte selbst betrachtet. — Auch ist die Eigenschaft des Centralpunktes selten die, welche bei den Anwenwendungen der Theorie der Involution vorkommt.

§. 126. Wenn man über zwei Segmenten aa', bb' zwei beliebige Kreise beschreibt, so geht ihre gemeinschaftliche Sehne stets durch den Centralpunkt. —

Es sei g der eine Durchschnittspunkt der beiden Kreise, so wird behauptet: daß die Gerade Og auch durch ihren zweiten Durchschnittspunkt geht. — Denn wenn g', g'' die Punkte bezeichnen, wo diese Gerade Og die beiden Kreise zum zweiten Male schneidet; so hat man:

$$Og \,.\, Og' = Oa \,.\, Oa',\; Og \,.\, Og'' = Ob \,.\, Ob',$$

und:

$$Oa \,.\, Oa = Ob \,.\, Ob';$$

folglich:

$$Og' = Og'',$$

d. h. die beiden Punkte g', g'' fallen zusammen. — Folglich ꝛc.

Hieraus folgt: Wenn man über drei Involutionssegmenten drei durch denselben beliebigen Punkt gehende Kreise beschreibt, so gehen alle drei durch ein und denselben zweiten Punkt, und ihre gemeinschaftliche Sehne geht durch den Centralpunkt der Involution. —

Ferner: Die über drei Involutionssegmenten als Durchmesser beschriebenen Kreise gehen alle drei durch dieselben beiden Punkte. —

Denn die gemeinschaftlichen Sehnen von je zwei dieser Kreise gehen alle drei durch den Centralpunkt, und da sie auf der Geraden der drei Segmente senkrecht sind; so fallen sie zusammen. Folglich ꝛc.

Die Durchschnittspunkte der drei Kreise können imaginär sein, was der Fall ist, wenn die Segmente nicht in einandergreifen; und alsdann sind die von dem Centralpunkte an die drei Kreise gezogenen Tangenten von gleicher Länge. —

Wenn die über den drei Segmenten aa', bb', cc' als Durchmesser beschriebenen Kreise sich schneiden, so sind die von einem der Durchschnittspunkte nach den Endpunkten jedes Segmentes gezogenen Geraden auf einander senkrecht. — Man kann also sagen: Wenn drei in gerader Linie liegende Segmente eine Involution bilden, so gibt es zwei reelle, oder imaginäre Punkte, von welchen aus die drei Segmente unter rechten Winkeln erscheinen. —

Umgekehrt folgt hieraus: Wenn sich ein rechter Winkel um seinen Scheitel drehet, so sind die Endpunkte der Segmente, welche derselbe in drei beliebigen Lagen auf einer festen Geraden abschneidet, in Involution. —

§. 127. III. Doppelpunkte. — Wir wollen nun die beiden Punkte e, f betrachten, wovon jeder mit den vier Punkten a, a', b, b' eine Involution von fünf Punkten bildet, worin dieser Punkt e oder f mit seinem conjugirten zusammenfällt (§. 121). Nach §. 123 haben diese beiden Punkte in Bezug auf die beiden Paare b, b'; c, c' dieselbe Eigenschaft; sie theilen also die drei Segmente aa', bb', cc' zugleich harmonisch, und man hat daher den Satz;

Wenn drei Punktepaare a, a'; b, b'; cc' in Involution sind, so gibt es zwei reelle, oder imaginäre Punkte, welche die drei Segmente aa', bb', cc' harmonisch theilen. —

Diese Punkte, deren Betrachtung oft von Nutzen ist, wollen wir die Doppelpunkte der Involution nennen. —

Zwischen jedem dieser Punnkte und irgend zwei von drei Involutionspaaren finden alle Gleichungen (d) in §. 121 statt, und jede dieser Gleichungen kann zur Bestimmung der fraglichen Punkte dienen.

Die beiden Doppelpunkte liegen auf beiden Seiten und in gleicher Entfernung von dem Centralpunkte. —

Denn da e mit $a, a'; b, b'$ eine Involution bildet, so hat man:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = (Oe)^2,$$

und ebenso für f:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = (Of)^2;$$

folglich:

$$(Oe)^2 = (Of)^2, \; Oe = -Of.$$

Offenbar muß man das Zeichen — nehmen, weil mit dem Zeichen + die beiden Punkte e, f zusammenfielen. —

Die Relation $(Oe)^2 = Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$ zeigt: daß diese beiden Punkte imaginär sind, wenn der Punkt O auf den Segmenten aa', bb' liegt, was der Fall ist, wenn diese beiden Segmente in einander greifen (§. 120), wogegen die beiden Doppelpunkte reell sind, wenn di ebeiden Segmente ganz aufeinander fallen, oder keinen Punkt gemein haben. —

§. 128. Die den beiden Paaren $a, a'; b, b'$ entsprechenden Doppelpunkte e, f bilden mit den beiden Punktepaaren $a, b'; a', b$ eine Involution. —

Denn nach §. 121 hat man die beiden Gleichungen:

$$\frac{ea \cdot cb'}{ea' \cdot eb} = -\frac{ab'}{a'b}, \quad \frac{fa \cdot fb'}{fa' \cdot fb} = -\frac{ab'}{a'b};$$

folglich:

$$\frac{ea \cdot eb'}{ea' \cdot eb} = \frac{fa \cdot fb'}{fa' \cdot fb},$$

welche Gleichheit ausdrückt: daß die drei Segmente $ab', a'b, ef$ in Involution sind. Oder, weil die beiden Punkte e, f jedes der beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen, so hat man:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f}, \quad \frac{be}{bf} = -\frac{b'e}{b'f};$$

folglich:

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = \frac{b'f}{b'e} : \frac{bf}{be},$$

woraus erhellet: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte

a,a'; e,f dem der vier Punkte b',b,f,e gleich ist, und mithin bilden die drei Paare a,b'; a',b; e,f eine Involution. —

Was von den beiden Segmenten ab', $a'b$ gesagt ist, gilt auch von ab, $a'b'$, so daß die beiden Punkte e,f, als conjugirte, zwei verschiedenen Involutionen angehören, wovon jede die vier andern Punkte a,a',b,b' enthält, aber verschieden gepaart. —

§. 129. Construction des Centralpunktes. — Zur Bestimmung des Centralpunktes sind zwei Paare conjugirter Punkte a,a'; b,b' hinreichend. — Wenn die beiden Segmente aa', bb' in einander eingreifen, so kann man um dieselben als Durchmesser zwei Kreise beschreiben, deren gemeinschaftliche Sehne den Centralpunkt bestimmt. — Wenn die beiden Segmente nicht in einander greifen, so legt man durch einen beliebigen, außerhalb der Geraden ab liegenden Punkt g zwei Kreise, deren resp. Sehnen die beiden Segmente aa', bb' sind. Diese beiden Kreise schneiden sich in einem zweiten Punkte g' und die Gerade gg' bestimmt auf ab einen Punkt O, welcher der Centralpunkt ist; denn man hat:

$$Og \,.\, Og' = Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'.$$

Oder: Der Punkt O wird nach §. 119 durch die Gleichung:

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'} \qquad (\mu)$$

bestimmt. Zieht man also durch die Punkte a,b zwei Parallelen $a\alpha, b\mathfrak{b}$, welche resp. den Segmenten ab', ba' gleich sind; so bestimmt die Gerade $\alpha\mathfrak{b}$ den Punkt O. — Die beiden Segmente $a\alpha$, $b\mathfrak{b}$ werden in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne genommen, jenachdem die ihnen gleichen Segmente ab', ba' in einerlei, oder in entgegengesetztem Sinne genommen sind. —

Aus der Gleichung (μ) folgt:

$$\frac{Oa}{Ob - Oa} = \frac{ab'}{ba' - ab'} \quad \text{oder} \quad \frac{Oa}{ab} = \frac{ab'}{ba' + b'a},$$

mithin:

$$aO = \frac{ab \,.\, ab'}{ab' + a'b},$$

und wenn $\alpha,\mathfrak{b}$ jetzt die Mitten der beiden Segmente aa', bb' sind:

$$aO = \frac{ab \cdot ab'}{2a\mathfrak{E}}.$$

Ebenso ist:

$$a'O = \frac{a'b \cdot a'b'}{2a\mathfrak{E}},$$

und:

$$\alpha O = \frac{aO + a'O}{2};$$

folglich:

$$\alpha O = \frac{ab \cdot ab' + a'b \cdot a'b'}{4a\mathfrak{E}}.$$

In diesen Ausdrücken von $aO, \alpha O$ können die beiden Punkte b, b' imaginär sein, und später werden wir eine Construction des Punktes O mittheilen, welche auch in dem Falle anwendbar ist, wo auch die beiden Punkte a, a' imaginär sind. —

§. 130. Construction der beiden Doppelpunkte. — Nach §. 127 können die beiden Doppelpunkte durch jede der Gleichungen (d) in §. 121 bestimmt werden. Die erste derselben gibt:

$$\frac{ae}{a'e} = \pm \frac{\sqrt{ab \cdot ab'}}{\sqrt{a'b \cdot a'b'}}$$

und es kommt folglich darauf an, das Segment aa' in einem gegebenen Verhältnisse zu theilen. — Zu dem Zwecke zieht man durch die Punkte a, a' zwei Parallelen $ak, a'k'$, welche resp. gleich $\sqrt{ab \cdot ab'}$, $\sqrt{a'b \cdot a'b'}$ sind; so bestimmt die Gerade kk' den Punkt e, und wenn man $a'k'' = a'k'$, aber in entgegengesetztem Sinne nimmt; so bestimmt die Gerade $k'k''$ den Punkt f. —

Zur Bestimmung der Längen von $ak, a'k'$ braucht man nur über dem Segmente bb' als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben und durch die Punkte a, a' Tangenten an denselben, oder Perpendikel auf den Durchmesser bb' zu ziehen.

Wenn die beiden Segmente aa', bb' in einandergreifen, so ist eins der beiden Produkte $ab \cdot ab', a'b \cdot a'b'$ negativ, mithin $\frac{ae}{a'e}$ imaginär, die Construction findet nicht mehr statt und die beiden gesuchten Punkte sind imaginär. —

Oder: Durch einen beliebig angenommenen Punkt g legt man zwei Kreise, deren resp. Sehnen die Segmente $ab', a'b$ sind, so schneiden sich diese Kreise in einem zweiten Punkte g'. — Durch denselben Punkt g zieht man zwei andere Kreise, deren resp. Sehnen $ab, a'b'$ sind, und welche sich in einem andern Punkte g'' schneiden; so geht der durch die drei Punkte g, g', g'' gelegte Kreis durch die beiden gesuchten Punkte e, f. — Denn die drei Segmente $ab, a'b, ef$ sind in Involution (§. 128); folglich geht der durch die drei Punkte e, f, g gelegte Kreis durch den Durchschnittspunkt g' der Kreise, deren Sehnen die Segmente $ab', a'b$ sind (§. 126); dieser Kreis geht also auch durch den Punkt g''. Folglich ꝛc.

Wenn der durch die drei Punkte g, g', g'' gelegte Kreis die Gerade ab nicht trifft, so sind die beiden Doppelpunkte imginär. —

Oder: Ueber den beiden Segmenten $ab', a'b$ als Durchmesser beschreibt man zwei Kreise, und über den beiden Segmenten $ab, a'b'$ zwei andere Kreise; so bestimmt der durch die Durchschnittspunkte dieser Kreise gelegte Kreis die beiden Punkte e, f, weil die drei Segmente $ab, a'b, ef$ sowohl als die drei Segmente $ab, a'b, ef$ in Involution sind. —

§. 131. Hat man den Centralpunkt O construirt, so kann man die beiden Doppelpunkte durch die Ausdrücke:

$$Oe = \pm \sqrt{Oa \,.\, Oa'},$$

$$Oe = \pm \sqrt{(O\alpha)^2 - (\alpha a)^2}$$

bestimmen, wo die beiden Punktepaare a, a' oder b, b' auch imaginär angenommen werden können.*) —

Der erste dieser Ausdrücke gibt wegen der Werthe von Oa und Oa' (§. 129):

$$Oe = \pm \frac{\sqrt{ab \,.\, ab' \,.\, a'b \,.\, a'b'}}{2\alpha\mathfrak{S}},$$

und mithin:

$$ef = \frac{\sqrt{ab \,.\, a'b \,.\, a'b \,.\, a'b'}}{\alpha\mathfrak{S}}.$$

Ferner ist $\alpha e = \alpha O - eO$, und folglich wegen der Ausdrücke von $\alpha O, eO$:

---

*) Wo die beiden imaginären Doppelpunkte liegen, ist nach den frühern Bemerkungen über die Lage imaginärer Punkte bekannt. —

$$\alpha e = \frac{ab \cdot a'b \cdot a'b \cdot a'b'}{4\alpha\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{ab \cdot a'b \cdot ab' \cdot a'b'}}{2\alpha\varepsilon},$$

wo die beiden Zeichen $\pm$ den beiden Punkten e, f entsprechen. —

Dieser Ausdruck von αe zeigt, daß diese beiden Punkte e, f reell sind, wenn das Produkt $ab \cdot ab' \cdot a'b \cdot a'b'$ positiv ist, was offenbar immer stattfindet, wenn das eine der beiden Segmente aa', bb' ganz auf dem andern, oder ganz außerhalb desselben liegt — und daß im Gegentheil dieses Produkt negativ ist, wenn die beiden Segmente in einander greifen. —

Der Ausdruck von αe kann auf die einfachere Form gebracht werden:

$$\alpha e = \frac{(\sqrt{ab \cdot ab'} \pm \sqrt{a'b \cdot a'b'})^2}{4\alpha\varepsilon},$$

worin die beiden Punkte b, b' auch als imaginär angenommen werden können, weil die Produkte $ab \cdot ab', a'b \cdot a'b'$ und die Mitte ε des Segmentes bb' immer reell sind. — Später werden wir eine Relation geben, welche zur Bestimmung der beiden (reellen) Doppelpunkte auch in dem Falle dienen kann, wo die Segmente aa', bb' beide imaginär sind. —

Ebenso hat man:

$$\varepsilon e = \frac{(\sqrt{ba \cdot ba'} \mp \sqrt{b'a \cdot b'a'})^2}{4\varepsilon\alpha},$$

wo das Zeichen $\mp$ gesetzt werden muß, weil für die drei Punkte α, ε, e die Relation $\alpha e + e\varepsilon + \varepsilon\alpha = 0$ stattfinden muß, welche so erfüllt wird. —

Das Verhältniß der beiden Segmente $\alpha e, \varepsilon e$ ist:

$$\frac{\alpha e}{\varepsilon e} = \frac{(\sqrt{ab \cdot ab'} \pm \sqrt{a'b \cdot a'b'})^2}{(\sqrt{ba \cdot ba'} \mp \sqrt{b'a \cdot b'a'})^2}$$

$$= \frac{(ab \cdot ab' - a'b \cdot a'b')^2}{[(ab + a'b')\sqrt{ab' \cdot a'b} \mp (a'b + ab')\sqrt{ab \cdot a'b'}]^2},$$

indem man im Zähler und Nenner mit $(\sqrt{ab \cdot ab'} \mp \sqrt{a'b \cdot a'b'})^2$ multiplicirt. —

Nun ist aber (§. 129):

$$\frac{ab \,.\, ab'}{2\alpha\varepsilon} = aO, \quad \frac{a'b \,.\, a'b'}{2\alpha\varepsilon} = a'O,$$

folglich:

$$ab \,.\, ab' - a'b \,.\, a'b' = 2\alpha\varepsilon\,(aO - a'O) = 2\alpha\varepsilon \,.\, aa',$$

und nach §. 4:

$$ab + a'b' = 2\alpha\varepsilon, \; a'b + ab' = 2\alpha\varepsilon.$$

Man hat also endlich:

$$\frac{\alpha e}{\varepsilon e} = \frac{(aa')^2}{(\sqrt{ab' \,.\, a'b} \mp \sqrt{ab \,.\, a'b'})^2},$$

wo das eine Zeichen dem Verhältnisse $\frac{\alpha e}{\varepsilon e}$ und das andere dem Verhältnisse $\frac{\alpha f}{\varepsilon f}$ entspricht. —

§. 132. Construction des sechsten Punktes einer Involution. — Es seien $a, a'; b, b'$ zwei Paare conjugirter Punkte und c ein fünfter Punkt einer Involution, deren sechster Punkt c' gefunden werden soll. — Durch einen willkürlich angenommenen Punkt g ziehe man zwei Kreise, deren resp. Sehnen die Segmente aa', bb' sind; so schneiden sich dieselben in einem zweiten Punkte g', und der durch die drei Punkte g, g', c gelegte Kreis schneidet die Gerade abc in einem zweiten Punkte c', welcher der sechste Punkt der Involution ist (§. 126).

Diese Construction findet noch statt, wenn eins der beiden Segmente aa', bb', oder beide, imaginär werden, weil man, wie wir später sehen werden, durch einen gegebenen Punkt immer einen Kreis legen kann, welcher mit einer Geraden zwei durch ihre Elemente (§. 54) bestimmte imaginäre Durchschnittspunkte hat. —

Oder: Nachdem der Centralpunkt O bestimmt ist, kann man nehmen:

$$Oc' = \frac{Oa \,.\, Oa'}{Oc},$$

und diese Formel ist auch in dem Falle anwendbar, wo die Punktepaare $a, a'; b, b'$ imaginär sind. —

§. 133. Relationen für sechs Punkte in Involution, worin ein willkürlicher Punkt vorkommt. — Wenn auf einer Geraden drei beliebige feste Segmente aa', bb', cc', deren Mitten α, β, γ sind, und ein beliebiger Punkt m genommen werden; so behält der Ausdruck:

$$ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta$$

stets denselben Werth, welche Lage der Punkt m auch haben mag. —

Denn es sei M ein anderer Punkt, so ist:

$$ma = Ma - Mm, \; ma' = Ma' - Mm,$$

und:

$$ma \cdot ma' = Ma \cdot Ma' - 2\,M\alpha \cdot Mm + (Mm)^2,$$

so wie:

$$mb \cdot mb' = Mb \cdot Mb' - 2\,M\beta \cdot Mm + (Mm)^2,$$

$$mc \cdot mc' = Mc \cdot Mc' - 2\,M\gamma \cdot Mm + (Mm)^2.$$

Multiplicirt man diese drei letzten Gleichungen resp mit $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, addirt die Produkte, und bemerkt, daß man für die drei Punkte α, β, γ und für die vier Punkte α, β, γ, M resp. die Relationen hat:

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0,$$

$$M\alpha \cdot \beta\gamma + M\beta \cdot \gamma\alpha + M\gamma \cdot \alpha\beta = 0;$$

so erhält man die Gleichung:

$$ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta$$
$$= Ma \cdot Ma' \cdot \beta\gamma + Mb \cdot Mb' \cdot \gamma\alpha + Mc \cdot Mc' \cdot \alpha\beta,$$

wodurch der Satz bewiesen ist. —

§ 134. Wenn sechs paarweise conjugirte Punkte a, a'; b, b'; c, c' eine Involution bilden, und man nimmt auf derselben Geraden einen beliebigen Punkt m an; so hat man, wenn α, β, γ die Mitten der drei Segmente aa', bb', cc' sind und die Zeichenregel beobachtet wird, stets die Relation:

(1) $$ma \cdot ma' \, \varepsilon\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\varepsilon = 0.$$

Denn nach dem letzten Satze hat der erste Theil dieser Gleichung für jede Lage des Punktes m einen constanten Werth. Dieser Werth ist aber $= 0$, wenn der Punkt m mit dem Centralpunkte O zusammenfällt, weil alsdann die drei Produkte $ma \cdot ma'$, $mb \cdot mb'$, $mc \cdot mc'$ einander gleich sind, also der erste Theil der letzten Gleichung wird:

$$ma \cdot ma' \, (\varepsilon\gamma + \gamma\alpha + \alpha\varepsilon),$$

welche Größe wegen der Relation $\varepsilon\gamma + \gamma\alpha + \alpha\varepsilon = 0$ offenbar $= 0$ ist. —

Oder: Da die Doppelpunkte e, f der Involution jedes der drei Segmente aa', bb', cc' harmonisch theilen, so hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} ma \cdot ma' + mc \cdot mf &= 2\, m\alpha \cdot mO, \\ mb \cdot mb' + mc \cdot mf &= 2\, m\varepsilon \cdot mO, \\ mc \cdot mc' + mc \cdot mf &= 2\, m\gamma \cdot mO. \end{aligned}\right\} \text{(§. 42, Gl. 7)}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\varepsilon\gamma, \gamma\alpha, \alpha\varepsilon$, addirt die Produkte und beachtet die beiden Relationen:

$$\varepsilon\gamma + \gamma\alpha + \alpha\varepsilon = 0,$$

$$ma \cdot \varepsilon\gamma + m\varepsilon \cdot \gamma\alpha + m\gamma \cdot \alpha\varepsilon = 0;$$

so erhält man:

$$ma \cdot ma' \cdot \varepsilon\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\varepsilon = 0;$$

w. b. w. s.

Wenn man die drei Punkte a', b', c' resp. mit ihren conjugirten a, b, c zusammenfallen läßt, so erhält man für vier in gerader Linie liegende Punkte a, b, c, m die Relation:

(1′) $$(ma)^2 \cdot bc + (mb)^2 \cdot ca + (mc)^2 \cdot ab + ab \cdot bc \cdot ca = 0.$$

Wenn die beiden Punkte b, b' mit dem Doppelpunkte e und die beiden Punkte c, c' mit dem Doppelpunkte f zusammenfallen, so wird die Gleichung (1):

(2) $$ma \cdot ma' \cdot ef + (me)^2 \cdot f\alpha + (mf)^2 \cdot \alpha e = 0,$$

welche Relation ausdrückt, daß die vier Punkte $a, a'; e, f$ eine harmoniſche Proportion bilden, und in §. 43 bereits auf einem andern Wege erhalten iſt. —

§. 135. Gleichungen mit dem Centralpunkte. — Wenn der Punkt c' in unendlicher Entfernung angenommen wird, in welchem Falle c der Centralpunkt O wird; ſo wird die Gleichung (1):

$$(3) \qquad ma \,.\, ma' - mb \,.\, mb' + 2\,\alpha\varepsilon \,.\, mO = 0.$$

Denn dividirt man die Gleichung (1) durch $\varepsilon\gamma$, ſo hat man;

$$ma \,.\, ma' + mb \,.\, mb' \,.\, \frac{\gamma a}{\varepsilon\gamma} + mc \,.\, \frac{mc'}{\varepsilon\gamma} \,.\, a\varepsilon = 0.$$

Nun iſt aber:

$$\varepsilon\gamma = \frac{\varepsilon c + \varepsilon c'}{2}\,, \quad \frac{\varepsilon\gamma}{mc'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon c}{mc'} + \frac{\varepsilon c'}{mc'}\right),$$

und wenn c' in unendlicher Entfernung liegt; ſo liegt γ auch in unendlicher Entfernung, und man hat:

$$\frac{\gamma a}{\varepsilon\gamma} = -\frac{a\gamma}{\varepsilon\gamma} = -1, \quad \frac{\varepsilon c}{mc'} = 0, \quad \frac{bc'}{mc'} = 1, \quad \frac{\varepsilon\gamma}{mc'} = \frac{1}{2}.$$

Die allgemeine Gleichung (1) wird demnach:

$$ma \,.\, ma' - mb \,.\, mb' + 2\alpha\varepsilon \,.\, mO = 0,$$

und man hat folglich den Satz:

Wenn aa', bb' zwei Segmente einer Geraden, O ihr durch die Relation:

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'$$

beſtimmter Centralpunkt und α, ε ihre Mitten ſind; ſo hat man für einen beliebigen Punkt m dieſer Geraden die Relation:

$$ma \,.\, ma' - mb \,.\, mb' + 2\,\alpha\varepsilon \,.\, mO = 0.$$

Oder: Die Mitte der beiden Doppelpunkte e, f iſt der Centralpunkt O, ſo daß man nach §. 42 die beiden Gleichungen hat:

$$me \cdot mf + ma \cdot ma' = 2\, ma \cdot mO,$$
$$me \cdot mf + mb \cdot mb' = 2\, m\mathfrak{E} \cdot mO,$$

woraus durch Subtraktion folgt:

$$ma \cdot ma' - mb \cdot mb' = 2\, \mathfrak{E}\alpha \cdot mO, \text{ w. b. w. f.}$$

Wenn der Punkt m mit a zusammenfällt, so ist:

$$(4) \qquad \frac{ab \cdot ab'}{aO} = 2\, a\mathfrak{E},$$

wie bereits in § 129 direkt gefunden ist. —

§. 136. Construction des Centralpunktes. — Die Gleichung (3) kann zur Construction des Centralpunktes O einer durch zwei Segmente aa', bb' bestimmten Involution dienen, und zwar auch in dem Falle, wo die beiden Segmente imaginär sind, wie solches geschehen kann, wenn sie von dem Durchschnitte einer Geraden mit zwei Kreisen herrühren; denn die Produkte $ma \cdot ma, mb \cdot mb$, so wie die Mittelpunkte $\alpha, \mathfrak{E}$ der beiden Segmente bleiben reell. —

Wenn die Punkte a, a' oder b, b' reell sind, so kann man den Punkt m in einen dieser Punkte legen und die Formel (4) anwenden. —

§. 137. Ausdrücke der Involution durch die Elemente der drei Punktepaare. — Die Gleichung (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$ma \cdot ma(m\mathfrak{E} - m\gamma) + mb \cdot mb'(m\gamma - m\alpha) + mc \cdot mc'(m\alpha - m\mathfrak{E}) = 0,$$

und wenn die reellen, oder imaginären Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' durch die drei Gleichungen:

$$x^2 + Ax + B = 0,$$
$$x^2 + A'x + B' = 0,$$
$$x^2 + A''x + B'' = 0$$

ausgedrückt werden (§. 54), so daß man hat:

$$m\alpha = -\frac{A}{2}, \; ma \cdot ma' = B, \; etc.;$$

so wird die Bedingung der Involution durch folgende Relation zwischen den sechs Coefficienten A, B, A', B', A'', B'' ausgedrückt:

$$(\alpha) \qquad B(A'-A'')+B'(A''-A)+B''(A-A')=0.$$

Statt dieſer einen Gleichung kann man auch drei Gleichungen mit zwei unbeſtimmten Coefficienten nehmen, nämlich:

$$B+\nu-A\lambda=0,$$
$$B'+\nu-A'\lambda=0,$$
$$B''+\nu-A''\lambda=0;$$

denn dieſe Gleichungen drücken nach §. 58 aus: daß die beiden Punkte jedes Paares die harmoniſch conjugirten in Bezug auf zwei feſte Punkte ſind, welche durch die Gleichung:

$$x^2+2\lambda x+\nu=0$$

beſtimmt werden, und die Doppelpunkte der Involution ſind. —

Uebrigens ergibt ſich durch Elimination von ν und λ zwiſchen den drei letzten Gleichungen die Gleichung (α) wieder. —

§. 138. Wenn die Gleichungen der beiden erſten Paare conjugirter Punkte folgende ſind:

$$x^2+Ax+B=0,$$
$$x^2+A'x+B'=0,$$

ſo iſt die des dritten Paares von der Form:

$$(x^2+Ax+B)+\lambda(x^2+A'x+B')=0,$$

d. h. die Coefficienten der Gleichung des dritten Punktepaares ſind:

$$A''=\frac{A+A'\lambda}{1+\lambda},\quad B''=\frac{B+B'\lambda}{1+\lambda};$$

denn wenn man λ eliminirt, ſo erhält man die Gleichung (α) wieder.

Oder: Man kann direkt zeigen, daß die drei Gleichungen drei Paare conjugirter Punkte ausdrücken, welche eine Involution bilden. — Denn bezeichnen a, a'; b, b'; c, c' die Entfernungen dieſer Punkte von einem gemeinſchaftlichen Anfangspunkte, ſo hat man:

$$x^2+Ax+B=(x-a)(x-a'),$$
$$x^2+A'x+B'=(x-b)(x-b'),$$

und die Gleichung des dritten Paares wird:

$$(x - a)(x - a') + \lambda (x - b)(x - b') = 0$$

oder:

$$\frac{(x - a)(x - a')}{(x - b)(x - b')} = -\lambda.$$

Da nun c, c' die Wurzeln dieser Gleichung sind, so hat man:

$$\frac{(c - a)(c - a')}{(c - b)(c - b')} = \frac{(c' - a)(c' - a')}{(c' - b)(c' - b')} = -\lambda,$$

und wenn jetzt dieselben Buchstaben $a, a', \ldots$ die Punkte selbst bezeichnen, deren Entfernungen von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte sie ausdrückten; so folgt:

$$\frac{ca \cdot ca'}{cb \cdot cb'} = \frac{c'a \cdot c'a'}{c'b \cdot c'b'},$$

woraus erhellet, daß die drei Punktepaare in Involution sind. —

§. 139. Relationen mit den Mittelpunkten der drei Involutionssegmente. — Für die drei Involutionspaare a, a'; b, b'; c, c' und ihre Mittelpunkte α, β, γ hat man die Relationen:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a\beta}{a\gamma}, \quad \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma},$$

$$\frac{bc \cdot bc'}{ba \cdot ba'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, \quad \frac{b'c \cdot b'c'}{b'a' \cdot b'a'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha},$$

$$\frac{ca \cdot ca'}{c'b \cdot cb'} = \frac{\gamma a}{\gamma\beta}, \quad \frac{c'a \cdot c'a'}{c'b \cdot c'b'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

Um diese Gleichungen, z. B. die erste, abzuleiten, wollen wir in der Gleichung (1) in §. 134 den Punkt m mit dem Punkte a zusammenfallen lassen; so wird das erste Glied $= 0$ und die Gleichung reducirt sich auf:

$$ab \cdot ab' \cdot \gamma a + ac' \cdot ac' \cdot a\beta = 0,$$

oder wegen $\gamma a = -a\gamma$:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a\beta}{a\gamma}, \text{ w. z. b. w.}$$

Diese wegen ihrer Einfachheit so merkwürdigen Gleichungen

geben auch sofort die Fundamentalgleichungen (*a*) und (*b*) in §. 117. Dies ist in Bezug auf (*a*) ohne Weiteres einleuchtend, und um z. B. die erste der Gleichungen (*b*) zu erhalten, braucht man nur die drei ersten untereinanderstehenden der obigen Gleichungen in einander zu multipliciren, wodurch man bekommt:

$$\frac{ab' \,.\, bc' \,.\, ca'}{ac' \,.\, cb' \,.\, ba'} = 1,$$

oder:

$$ab' \,.\, bc' \,.\, ca' = -\, a'b \,.\, b'c \,.\, c'a.$$

§. 140. Für drei Involutionssegmente aa', bb', cc' und ihre Mittelpunkte $\alpha, \mathfrak{E}, \gamma$ hat man die Relation:

$$(\alpha a)^2 \,.\, \mathfrak{E}\gamma + (\mathfrak{E}b)^2 \,.\, \gamma\alpha + (\gamma c)^2 \,.\, \alpha\mathfrak{E} + \alpha\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{E}\gamma \,.\, \gamma\alpha = 0.$$

Dann bemerkt man, daß:

$$m\alpha \,.\, ma' = (m\alpha)^2 - (\alpha a)^2$$
$$\ldots = \ldots\ldots$$
$$\ldots = \ldots\ldots$$

ist, so wird die Gleichung (1) in §. 134:

$$(m\alpha)^2.\mathfrak{E}\gamma + (m\mathfrak{E})^2.\gamma\alpha + (m\gamma)^2.\alpha\mathfrak{E} - [(\alpha a)^2.\mathfrak{E}\gamma + (\mathfrak{E}b)^2.\gamma\alpha + (\gamma c)^2.\alpha\mathfrak{E}] = 0,$$

oder wegen der Gleichung (1′) in §. 134:

(μ) $(\alpha a)^2 \,.\, \mathfrak{E}\gamma + (\mathfrak{E}b)^2 \,.\, \gamma\alpha + (\gamma c)^2 \,.\, \alpha\mathfrak{E} + \alpha\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{E}\gamma \,.\, \gamma\alpha = 0$, w. z. b. w.

Wenn die beiden Punkte c, c' in dem Doppelpunkte e zusammenfallen, so wird die Gleichung:

$$(\alpha a)^2 \,.\, \mathfrak{E}e + (\mathfrak{E}b)^2 \,.\, e\alpha + \alpha\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{E}e \,.\, e\alpha = 0,$$

oder:

$$\frac{(aa')^2}{ae} - \frac{(bb')^2}{\mathfrak{E}e} = 4\,\alpha\mathfrak{E}.$$

Diese Relation kann zur Bestimmung der (reellen) Doppelpunkte einer Involution dienen, und ist selbst in dem Falle anwendbar, wo die beiden Segmente aa', bb' imaginär sind. —

§. 140a. Wenn $\alpha, \mathfrak{E}, \gamma$ die Mittelpunkte der harmoni-

schen Mittel desselben Punktes n in Beziehung auf die drei Segmente aa', bb', cc' sind, so hat man die Gleichung:

$$\frac{(a\alpha)^2}{(na)^2}\cdot\frac{\varepsilon\gamma}{na}+\frac{(\varepsilon b)^2}{(nb)^2}\cdot\frac{\gamma a}{n\varepsilon}+\frac{(\gamma c)^2}{(nc)^2}\cdot\frac{a\varepsilon}{n\gamma}+\frac{a\varepsilon.\varepsilon\gamma.\gamma a}{na.n\varepsilon.n\gamma}=0;$$

Denn wenn man mit $\frac{na.n\varepsilon.n\gamma}{a\varepsilon.\varepsilon\gamma.\gamma a}$ multiplicirt, so kann man die Gleichung so schreiben, daß sie nur anharmonische Verhältnisse enthält, und z. B. das erste Glied wird $=\left(\frac{aa}{na}:\frac{a\varepsilon}{n\varepsilon}\right)\cdot\left(\frac{aa}{na}:\frac{a\gamma}{n\gamma}\right)$. Die Gleichung findet also für jede Lage des Punktes n statt, wenn sie für eine Lage stattfindet. Sie findet aber statt, wenn der Punkt n in unendlicher Entfernung liegt; denn sie reducirt sich auf die vorhergehende (μ), worin a, ε, γ die Mitten der drei Segmente aa', bb', cc' sind. Mithin findet die Gleichung für jede Lage des Punktes n statt. —

§. 141. Verschiedene Relationen. — In jeder der Gleichungen, worin die Mittelpunkte a, ε, γ der drei Segmente aa', bb', cc' vorkommen, kann man diese Punkte vermittelst der Ausdrücke:

$$a\varepsilon=\frac{ab'+a'b}{2},\quad \varepsilon\gamma=\frac{bc'+b'c}{2},\quad \gamma a=\frac{ca'+c'a}{2}$$

durch die Involutionspunkte $a, a', b, \ldots$ ersetzen. Die Gleichungen in §. 139 gehen dadurch in folgende über:

$$\frac{ab.ab'}{ac.ac'}=\frac{ab'+a'b}{ac'+a'c},$$

. . . . . .

wovon wir Gebrauch machen werden. —

§. 141a. Da die Involution von sechs Punkten die Gleichheit zweier anharmonischer Verhältnisse ist, so kann man sie auch durch dreigliedrige Gleichungen ausdrücken (§. 30). Man findet, daß diese Gleichungen von zwei verschiedenen Formen:

$$(\mu)\qquad aa'=\frac{ab.a'c}{bc}+\frac{ab'.a'c'}{b'c'},\ etc.$$

$$\frac{ab.a'c}{ac.a'b}=\frac{aa'.b'c'}{ab'.a'c'},\ etc.$$

sind, und die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten a, b, c, a' und a', b', c', a ausdrücken. — Alle übrigen ähnlichen Gleichungen werden gebildet, wenn man jeden Buchstaben durch seinen conjugirten, oder zwei conjugirte Buchstaben durch zwei andere conjugirte Buchstaben, und umgekehrt, ersetzt. —

§. 141b. Die dreigliedrige Gleichung mit einem willkürlichen Punkte, welche die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten ausdrückt (§. 30), gibt auch Relationen für sechs Punkte, welche eine Involution bilden. — Nehmen wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{ca}{c'a'} . bd . ma' + \frac{cb}{c'b'} . da . mb' + \frac{cd}{c'd'} . ab . md' = 0,$$

und lassen die Punkte d, d' resp. mit c', c zusammenfallen, so wird dieselbe:

$$\frac{ca}{c'a'} . bc' . ma' + \frac{cb}{c'b'} . c'a . mb' - ab . mc = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt, daß die drei Punktepaare $a, a'; b, b'; c, c'$ in Involution sind. —

Wenn man die beiden Punkte d, d' resp. mit b', b zusammenfallen läßt, so erhält man die andere Gleichung:

$$\frac{ca}{c'a'} . bb' . ma' + \frac{cb}{c'b'} . b'a . mb' + \frac{cb'}{c'b} . ab . mb = 0.$$

Läßt man in den beiden letzten Gleichungen den Punkt m in unendliche Entfernung rücken, so gehen sie resp. in folgende über:

$$\frac{ca}{c'a'} . bc' + \frac{cb}{c'b'} . c'a - ab = 0,$$

$$\frac{ca}{c'a'} . bb' + \frac{cb}{c'b'} . b'a + \frac{cb'}{c'b} . ab - 0.$$

Wenn man in der Gleichung:

$$a\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\gamma + \gamma a \text{ oder } \frac{\mathfrak{E}\gamma}{\mathfrak{E}a} + \frac{a\gamma}{a\mathfrak{E}} = 1$$

für die Verhältnisse $\frac{\varepsilon\gamma}{\varepsilon a}$, $\frac{a\gamma}{a\varepsilon}$ ihre Werthe setzt (§. 139), so erhält man:

$$\frac{bc.bc'}{ba.ba'} + \frac{ac.ac'}{ab.ab'} = 1,$$

oder:

$$ab = \frac{ac.ac'}{ab'} - \frac{bc.bc'}{ba'},$$

und die ähnlichen Ausdrücke für $ab', bc, \ldots$ ergeben sich durch Vertauschung der Buchstaben. —

§. 142. Relationen mit zwei willkürlichen Punkten. — Wir wollen die Gleichung (1) in §. 134 auf die Form bringen:

$$\frac{ma.ma'}{mc.mc'} \cdot \frac{\varepsilon\gamma}{\varepsilon a} + \frac{mb.mb'}{mc.mc'} \cdot \frac{a\gamma}{a\varepsilon} - 1 = 0,$$

und es sei n ein in unendlicher Entfernung liegender Punkt; so läßt sich derselbe auf folgende Weise in diese Gleichung einführen:

$$\left(\frac{ma}{mc} : \frac{na}{nc}\right)\left(\frac{ma'}{mc'} : \frac{na'}{nc'}\right)\left(\frac{\varepsilon\gamma}{\varepsilon a} : \frac{n\gamma}{na}\right)$$
$$+\left(\frac{mb}{mc} : \frac{nb}{nc}\right)\left(\frac{mb'}{mc'} : \frac{nb'}{nc'}\right)\left(\frac{a\gamma}{a\varepsilon} : \frac{n\gamma}{n\varepsilon}\right) - 1 = 0.$$

Da in dieser Gleichung nur anharmonische Verhältnisse vorkommen, so folgt: daß sie für jede Lage des Punktes n stattfindet; nur ist alsdann der Punkt a nicht mehr die Mitte des Segmentes $a\,a'$, sondern der harmonisch conjugirte Punkt von n in Bezug auf a, a' — und dasselbe gilt von den Punkten ε, γ. —

Diese Gleichung mit zwei willkürlichen Punkten kann auch folgendergestalt geschrieben werden:

$$\frac{ma.ma'}{na.na'} . \varepsilon\gamma . n\alpha + \frac{mb.mb'}{nb.nb'} . \gamma\alpha . n\varepsilon + \frac{mc.mc'}{nc.nc'} . a\varepsilon . n\gamma = 0$$

und drückt eine Involution von sechs Punkten vermittelst zweier willkürlicher Punkte m, n aus. —

Wenn der Punkt m mit a zusammenfällt, so erhält man folgende Gleichung, welche die Involution mittelst eines einzigen willkürlichen Punktes ausdrückt:

$$\frac{ab \cdot ab'}{nb \cdot nb'} \cdot \frac{ac \cdot ac'}{nc \cdot nc'} = \frac{a\varepsilon}{a\gamma} \cdot \frac{n\varepsilon}{n\gamma}.$$

Die Gleichungen vereinfachen sich, wenn die Mittelpunkte $a_1, \varepsilon_1, \gamma_1$ der drei Segmente aa', bb', cc' in dieselben eingeführt werden. Denn nach §. 45 ist:

$$na \cdot na_1 = na \cdot na', \ldots\ldots$$

folglich:

$$ma \cdot ma' \cdot \frac{\varepsilon\gamma}{na_1} + mb \cdot mb' \cdot \frac{\gamma a}{n\varepsilon_1} + mc \cdot mc' \cdot \frac{a\varepsilon}{n\gamma_1} = 0$$

und:

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a\varepsilon}{a\gamma} \cdot \frac{n\varepsilon_1}{n\gamma_1}.$$

Wenn man in den vorhergehenden Gleichungen den Punkt m in unendlicher Entfernung annimmt, so gehen sie in folgende mit einem willkürlichen Punkte über:

$$(\alpha) \qquad \frac{\varepsilon\gamma \cdot na}{na \cdot na'} + \frac{\gamma a \cdot n\varepsilon}{nb \cdot nb'} + \frac{a\varepsilon \cdot n\gamma}{nc \cdot nc'} = 0,$$

$$\frac{\varepsilon\gamma}{na_1} + \frac{\gamma a}{n\varepsilon_1} + \frac{a\varepsilon}{n\gamma_1} = 0.$$

Wenn man in der allgemeinen Gleichung den Punkt c' in unendlicher Entfernung annimmt, so wird c der Centralpunkt O, und man hat die Gleichung:

$$\frac{ma \cdot ma'}{na \cdot na'} \cdot \varepsilon\gamma \cdot na + \frac{mb \cdot mb'}{nb \cdot nb'} \cdot \gamma a \cdot nb + \frac{mO}{nO} \cdot a\varepsilon \cdot n\gamma = 0$$

worin a, ε die harmonisch conjugirten Punkte von n in Beziehung auf die beiden Segmente aa', bb' sind, und der Punkt γ hat eine solche Lage, daß der Punkt O die Mitte des Segmentes $n\gamma$ ist. —

Läßt man den Punkt m mit a zusammenfallen, und bemerkt, daß $n\gamma = 2nO$ ist; so hat man:

$$\frac{ab \cdot ab'}{nb \cdot nb'} = 2\frac{aO}{n\varepsilon} \cdot \frac{a\varepsilon}{a\gamma}.$$

Es ist zu bemerken: daß alle diese Gleichungen mit einem, oder mit zwei willkürlichen Punkten auch in den Fällen anwendbar sind, wo die Involutionspunkte imaginär sind, weil in einigen die beiden Punkte jedes Paares durch reelle Elemente (§. 60) dargestellt sind, und in den andern durch solche Elemente ersetzt werden können. —

§. 143. Aufgabe. Wenn zwei Segmente aa', bb' und die Mitte γ eines dritten gegeben sind, letzteres zu finden. —

Aufl. Durch einen willkürlich angenommenen Punkt g lege man zwei Kreise, deren resp. Sehnen die Segmente aa', bb' sind; so schneiden sich dieselben in einem zweiten Punkte g'. Ferner lege man durch die beiden Punkte g, g' einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem im Punkte γ auf der Geraden ab errichteten Perpendikel liegt; so sind die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit der Geraden ab die beiden gesuchten Punkte c, c' (§. 126), welche imaginär sind, wenn der Kreis die Gerade nicht schneidet. —

Wenn die beiden Segmente aa', bb' in einandergreifen, so läßt sich die Construction vereinfachen; denn man braucht um diese beiden Segmente als Durchmesser nur zwei Kreise zu beschreiben und durch deren Durchschnittspunkte einen Kreis zu legen, dessen Mittelpunkt γ ist; so bestimmt dieser Kreis auf der Geraden ab die beiden gesuchten Punkte c, c', welche in diesem Falle immer reell sind. —

§. 144. Ausdrücke für γc. — Es sei O der Centralpunkt der Involution, so wird das Segment γc durch die sich aus $Oa \,.\, Oa' = Oc \,.\, Oc'$ ergebende Relation:

$$(\nu) \qquad (\gamma c)^2 = (O\gamma)^2 - Oa \,.\, Oa'$$

bestimmt. — Wenn die beiden Segmente aa', bb' in einandergreifen, so ist das Produkt $Oa \,.\, Oa'$ negativ, und das Segment γc stets reell; aber wenn diese beiden Segmente nicht in einandergreifen, so ist dieses Produkt positiv, und γc reell, oder imaginär, jenachdem:

$$(O\gamma)^2 \gtrless Oa \,.\, Oa'$$

ist. — Wenn aber e, f die Doppelpunkte der Involution sind, so ist:

$$Oa \,.\, Oa' = (Oe)^2 = (Of)^2.$$

Das Segment γc ist also reell, oder imaginär ist, jenachdem $O\gamma \gtrless Oe$ ist, d. h. jenachdem der Mittelpunkt γ außerhalb des Segmentes ef, oder auf demselben zwischen den Punkten e, f liegt. Denn da die beiden gesuchten Punkte c, c' in Bezug auf die beiden Doppelpunkte e, f harmonisch conjugirt sein müssen, so muß ihr Mittelpunkt γ außerhalb des Segmentes ef liegen (§. 35.) Diese Construction ist auch in dem Falle anwendbar, wo die beiden Segmente aa', bb' imaginär sind. —

Ferner sei γ' der Punkt, welcher mit γ und den beiden Paaren a, a'; b, b' eine Involution bildet; so hat man:

$$(\gamma c)^2 = \gamma\gamma' \,.\, \gamma O.$$

Denn wegen $O\gamma \,.\, O\gamma' = Oa \,.\, Oa'$ wird der Ausdruck (ν):

$$(\gamma c)^2 = (O\gamma)^2 - O\gamma \,.\, O\gamma' = O\gamma\,(O\gamma - O\gamma') = \gamma\gamma' \,.\, \gamma O.$$

Die Gleichung (1) in §. 134 gibt das Rechteck $mc \,.\, mc'$, welches mit dem Punkte γ zur Bestimmung der Punkte c, c' genügt. Einfacher ist es, wenn man für den Punkt m den Punkt γ selbst nimmt, und die Gleichung wird alsdann:

$$(\gamma c)^2 \,.\, a\mathfrak{C} = \gamma a \,.\, \gamma a' \,.\, \mathfrak{C}\gamma + \gamma b \,.\, \gamma b' \,.\, \gamma a.$$

Man kann sich auch der Gleichung (μ) in §. 140 bedienen, worin alle Segmente, mit Ausnahme von γc, bekannt sind. —

Diese Gleichungen sind auch in dem Falle anwendbar, wo die Punktepaare a, a'; b, b' imaginär sind. —

§. 145. Wenn der Punkt b' in unendlicher Entfernung angenommen wird, so wird die Aufgabe folgende:

Wenn zwei conjugirte Punkte a, a' einer Involution, der Centralpunkt O und die Mitte γ der beiden andern conjugirten Punkte gegeben sind, letztere zu bestimmen. —

Aufl. Man beschreibt irgend einen durch die beiden Punkte a, a' gehenden Kreis, zieht durch den Punkt O eine beliebige Se-

rade, welche den Kreis in zwei Punkten g, g' schneidet, und legt durch diese beiden Punkte einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem im Punkte γ auf der Geraden aa' errichteten Perpendikel liegt; so bestimmt dieser Kreis auf aa' die beiden gesuchten Punkte c, c' (§. 126), welche auch imaginär sein können. —

Wenn der Punkt O zwischen a und a' liegt, so vereinfacht sich die Construction. — Man beschreibt nämlich um das Segment aa' als Durchmesser einen Kreis, zieht in O ein Perpendikel auf Oa', und durch die Durchschnittspunkte desselben mit dem Kreise legt man einen zweiten Kreis, dessen Mittelpunkt γ ist; so bestimmt dieser Kreis auf der Geraden aa' die beiden gesuchten Punkte. —

Anmerkung. — Später werden wir sehen, daß die meisten der vorhin für sechs Involutionspunkte hergeleiteten Gleichungen auch auf ein System von drei Punktepaaren anwendbar sind, welche nicht in gerader Linie liegen; nämlich auf die vier Ecken und die beiden Durchschnittspunkte zweier Gegenseiten eines Viereckes, was zu vielen Eigenschaften des Viereckes führt; allein die Theorie der Involution gestattet noch viele andere Anwendungen, und hierin liegt der Grund, weshalb diese Theorie im Vorhergehenden so ausführlich erörtert ist. —

§. 146. Homographische Involutionstheilungen. — Wenn zwei Punktepaare a, a'; b, b' gegeben sind, so kann man unendlich viele andere Paare c, c'; d, d'; ... bestimmen, wovon jedes mit den beiden gegebenen eine Involution bildet. — Alsdann bilden alle die Punkte $a, b, c, d, \ldots$ und die Punkte $a', b', c', d', \ldots$ zwei homographische Theilungen — und wenn man einen Punkt c' der zweiten Theilung als der ersten angehörig betrachtet; so ist sein homologer in der zweiten der Punkt c der ersten. —

Denn das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, a', c ist dem der vier Punkte a', b', a, c' gleich, und da die drei Punkte a, b, a', so wie die drei Punkte a', b', a fest liegen; so bilden die beiden veränderlichen Punkte c, c' zwei homographische Theilungen (§. 63). Da aber die drei Paare a, a'; b, b'; c, c' eine Involution bilden, so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, a', c' dem der vier Punkte a', b', a, c gleich, woraus folgt: daß

der Punkt c' als der ersten Theilung angehörend betrachtet, in der zweiten Theilung den Punkt c zum homologen hat. — Folglich ꝛc.

Durch Anwendung des Centralpunktes kann man den Satz sehr einfach darthun; denn man hat:

$$Oa \,.\, Oa' = Oc \,.\, Oc' = const.$$

Mithin bilden die beiden Puukte c, c' zwei homographische Theilungen. (§. 79). Diese Gleichung findet aber noch statt, wenn man c in c' und umgekehrt c' in c umsetzt. Wenn also der Punkt c' als der ersten Theilung angehörend betrachtet wird, so ist c sein homologer Punkt in der zweiten Theilung. —

Diese beiden Theilungen haben wir bereits in §. 113 als besondern Fall der homographischen Theilung betrachtet, und sollen homographische Involutionstheilungen heißen. —

§. 147. Sollen zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden in Involution sein, so genügt es, daß ein beliebiger Punkt dieser Geraden, successive als beiden Theilungen angehörig betrachtet, in beiden Fällen denselben homologen Punkt hat; d. h. wenn dies für einen Punkt stattfindet, so haben alle andern Punkte dieselbe Eigenschaft. —

Diese wichtige Eigenschaft ist bereits in der allgemeinen Theorie der homographischen Theilung (§. 113) bewiesen, und wir wollen hier noch einen zweiten Beweis derselben mittheilen, welcher blos auf dem Begriffe der Involution beruht. —

Es seien a, b, c drei Punkte der ersten Theilung und a', b', c' die entsprechenden in der zweiten, und wir wollen annehmen, daß der Punkt c, wenn er als der zweiten Theilung angehörig betrachtet wird, in der ersten den Punkt c' zum homologen habe; so ist zu beweisen: daß dasselbe von dem Punkte a gilt, d. h. wenn a als der zweiten Theilung angehörig betrachtet wird, a' der homologe Punkt in der ersten Theilung ist. —

Da nach der Voraussetzung a, b, c, c' und a', b', c', c die einander in der ersten und zweiten Theilung entsprechenden Punkte sind, so sind die anharmonischen Verhältnisse beider Systeme einander gleich, und folglich sind die drei Paare conjugirter Punkte $a, a'; b, b'; c, c'$ in Involution (§. 116). Mithin sind die anharmonischen Ver-

hältniſſe der beiden Syſteme a, a', b, c und a', a, b', c' einander gleich; folglich hat der Punkt a, als der zweiten Theilung angehörig, in der erſten den Punkt a' zum homologen. —

§. 148 Zwei homographiſch getheilte Gerade können immer ſo aufeinander gelegt werden, daß die beiden Theilungen in Involution ſind. —

Denn es ſeien a, a' zwei homologe Punkte beider Theilungen, ſo kann man nach § 84 immer zwei andere homologe Punkte b, b' von ſolcher Beſchaffenheit beſtimmen, daß die Segmente ab und $a'b'$ einander gleich werden. Legt man nun die zweite Gerade ſo auf die erſte, daß der Punkt b' mit a und a' mit b zuſammenfällt; ſo hat der Punkt a, als der erſten Theilung angehörend betrachtet, in der zweiten den Punkt a' zum homologen, und als der zweiten Theilung angehörig, in der erſten denſelben homologen Punkt a'. Mithin findet daſſelbe auch für jeden andern Punkt ſtatt (§. 147); d h. die beiden Theilungen ſind in Involution. —

Hieraus folgt: daß zwei homographiſche Involutionstheilungen dieſelbe Allgemeinheit, wie zwei homographiſche Theilungen überhaupt haben, und daß die Relationen, welche für drei Paare conjugirter Punkte ſtattfinden, blos von der beſondern Art herrühren, wie die beiden Geraden, worauf man ſich die beiden Theilungen gemacht vorſtellen kann, aufeinander gelegt ſind. —

§. 149. Ausdrücke für zwei homographiſche Involutionstheilungen. — Jede der Relationen für ſechs Punkte in Involution $a, a'; b, b'; c, c'$ drückt zwei homographiſche Theilungen in Involution aus, wenn man die vier Punkte $a, a'; b, b'$ als feſt und die beiden Punkte c, c' als veränderlich, und reſp. als den beiden Theilungen angehörig betrachtet. — Man kann ſich auch der verſchiedenen Formeln bedienen, durch welche wir zwei beliebige homographiſche Theilungen ausgedrückt haben, wenn man den conſtanten Coefficienten ſolche Werthe beilegt, daß die beiden Theilungen in Involution ſind. — Zu dem Zwecke braucht man nur durch eine Bedingungsgleichung zwiſchen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung auszudrücken, daß ein beliebiger Punkt denſelben conjugirten hat, er mag als der einen, oder der andern Theilung angehörig betrachtet werden. — Wenn man z. B. den in

unendlicher Entfernung liegenden Punkt nimmt, so drückt man aus, daß die beiden Punkte J, J' zusammenfallen. —

Wir wollen diese Betrachtungen auf die allgemeine Gleichung:

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0$$

anwenden. Der Punkt J der ersten Theilung, welcher dem unendlich entfernten der zweiten entspricht, wird durch $aJ = -\mu$ bestimmt, und der Punkt J' der zweiten Theilung, welcher dem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der ersten entspricht, durch $b'J' = -\lambda$. Die Bedingung: daß diese beiden Punkte zusammenfallen, wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$aJ = b'J' \text{ oder } aJ - b'J' = ab',$$

und mithin ist:

$$\lambda - \mu = ab'$$

die Bedingung, daß die beiden Theilungen in Involution sind. —

Wenn die beiden veränderlichen Punkte m, m' sich in der Gleichung, welche die homographischen Theilungen ausdrückt, auf einerlei Anfangspunkt beziehen; so braucht, damit die beiden Theilungen in Involution sind, die Gleichung nur in Beziehung auf diese beiden Punkte symmetrisch zu sein, weil man sie alsdann untereinander vertauschen kann, welches die charakteristische Eigenschaft der Involution ist. — Hiernach drückt jede der Gleichungen:

$$\frac{em}{fm} = -\frac{em'}{fm'},$$

$$Om \,.\, Om' = \nu,$$

$$\frac{am \,.\, am'}{a'm \,.\, a'm'} = \lambda,$$

$$am \,.\, am' + \lambda\,(am + am') + \nu = 0$$

zwei homographische Involutionstheilungen aus. —

Wenn ein Doppelpunkt zweier homographischer Theilungen in unendlicher Entfernung liegt, so werden sie nach §. 83 ausgedrückt durch:

$$am + \lambda \,.\, b'm' = \nu,$$

wofür man schreiben kann:

$$am + \lambda \,.\, am' = (\nu + \lambda\, ab'),$$

und hieraus ſieht man, daß die beiden Theilungen in Involution ſind, wenn $\lambda = 1$ iſt; denn alsdann kann man m und m' gegenſeitig vertauſchen, ohne daß die Gleichung geändert wird. — Hiernach drückt die Gleichung:

$$a\,m + b'\,m' = v$$

zwei homographiſche Involutionstheilungen aus, wovon ein Doppelpunkt in unendlicher Entfernung liegt. —

Der andere Doppelpunkt f iſt die Mitte jedes Segmentes zwiſchen zwei conjugirten Punkten, weil die beiden Doppelpunkte dieſe Segmente harmoniſch theilen. —

§. 150. Sechsſtrahlige Involutionsbüſchel. — Sechs Gerade oder Strahlen, welche von demſelben Punkte ausgehen und paarweiſe conjugirt ſind, ſind in Involution oder bilden ein Involutionsbüſchel, wenn das anharmoniſche Verhältniß von vier dieſer Geraden dem der vier conjugirten gleich iſt. — Ein ſolches Büſchel hat offenbar die Eigenſchaft: daß es jede Transverſale in ſechs Punkten trifft, welche eine Involution bilden, und alle Relationen in Bezug auf dieſe Punkte, worin nur anharmoniſche Verhältniſſe vorkommen, ſind unmittelbar auf die ſechs Geraden anwendbar. — Hieraus, und aus der Definition des Involutionsbüſchels ſelbſt folgt ohne Weiteres, daß man folgende ſieben Gleichungen hat:

$$\frac{\sin(A,B)\,.\,\sin(A,B')}{\sin(A,C)\,.\,\sin(A,C')} = \frac{\sin(A',B)\,.\,\sin(A',B')}{\sin(A',C)\,.\,\sin(A',C')},$$

$$\sin(A,B).\sin(B',C).\sin(C'',A') = -\sin(A',B').\sin(B,C'').\sin(C,A),$$

. . . . . .

wovon jede die übrigen zur Folge hat, und zur Beſtimmung der Involution von ſechs Geraden oder Strahlen genügt. —

Den bei der Involution eines Syſtemes von Punkten betrachteten beiden Doppelpunkten entſprechen hier zwei Doppelſtrahlen, welche imaginär ſein können. — Dieſe beiden Strahlen haben die Eigenſchaft: daß ſie mit zwei beliebigen conjugirten Strahlen ein harmoniſches Büſchel bilden. —

Aber es gibt keinen Strahl, welcher dem Centralpunkte einer Involution von ſechs Punkten entſpricht, wovon der Grund auch

leicht einzusehen ist. — Denn das unterscheidende Merkmal des Centralpunktes besteht darin: daß sein conjugirter Punkt in unendlicher Entfernung liegt und aus der Gleichung verschwindet — und diesen beiden Punkten entsprechen in einem Büschel zwei Strahlen, welche nichts Unterschiedenes darbieten, und wovon keiner aus der Gleichung verschwindet. — Jedoch gibt es immer zwei aufeinander senkrechte Strahlen, für welche man, wie man später sehen wird, ähnliche Gleichungen hat, wie die für den Centralpunkt (S. §. 157, Gl. (α)).

§. 151. Die Gleichung (1) in §. 134 mit einem willkürlichen Punkte enthält keine anharmonischen Verhältnisse, und es findet folglich auch keine ähnliche Gleichung zwischen den Sinussen der Winkel eines Involutionsbüschels statt. Aber die Gleichung mit zwei willkürlichen Punkten in §. 142 findet auch für ein sechsstrahliger Involutionsbüschel statt, und ist hier:

$$\frac{\sin(M,A)\,.\,\sin(M,A')}{\sin(N,A)\,.\,\sin(N,A')}\,.\,\sin(N,\alpha)\,.\,\sin(\varepsilon,\gamma)$$
$$+\frac{\sin(M,B)\,.\,\sin(M,B')}{\sin(N,B)\,.\,\sin(N,B')}\,.\,\sin(N,\varepsilon)\,\sin(\gamma,\alpha)$$
$$+\frac{\sin(M,C)\,.\,\sin(M,C')}{\sin(N,C)\,.\,\sin(N,C')}\,.\,\sin(N,\gamma)\,.\,\sin(\alpha,\varepsilon)=0,$$

wo M, N zwei willkürliche Strahlen sind, α ist der harmonisch conjugirte Strahl von N in Bezug auf A, A', und Aehnliches gilt von ε, γ.

Wenn die beiden Strahlen M, N aufeinander senkrecht sind, so ist:

$$\frac{\sin(\varepsilon\,.\,\gamma)\,.\,\sin(N,\alpha)}{tang\,(N,A)\,.\,tang\,(N,A')}+\frac{\sin(\gamma,\alpha)\,.\,\sin(N,\varepsilon)}{tang\,(N,B)\,.\,tang\,(N,B')}$$
$$+\frac{\sin(\alpha,\varepsilon)\,.\,\sin(N,\gamma)}{tang\,(N,C)\,.\,tang\,(N,C')}=0,$$

oder:

$$tang\,(M,A)\,.\,tang\,(M,A')\,.\,\sin(\varepsilon,\gamma)\,.\,\cos(M,\alpha)$$
$$+\,tang\,(M,B)\,.\,tang\,(M,B')\,.\,\sin(\gamma,\alpha)\,.\,\cos(M,\varepsilon)$$
$$+\,tang\,(M,C)\,.\,tang\,(M,C')\,.\,\sin(\alpha,\varepsilon)\,.\,\cos(M,\gamma)=0.$$

§. 152. Wenn in einem sechsstrahligen Involutionsbüschel zwei Strahlen auf ihren conjugirten resp. senkrecht sind, so sind die beiden andern conjugirten Strahlen ebenfalls auf einander senkrecht. —

Denn eine Transversale schneidet die sechs Strahlen in Punkten a, a'; b, b'; c, c', welche eine Involution bilden, und die über den beiden Segmenten aa', bb' als Durchmesser beschriebenen Kreise gehen durch die Spitze O des Büschels, weil die beiden Strahlen OA, OA' sowie OB, OB' nach der Voraussetzung auf einander senkrecht sind. Folglich geht der über dem dritten Segmente cc' beschriebene Kreis ebenfalls durch den Punkt O (§. 126), und mithin sind die beiden Strahlen C, C' ebenfalls aufeinander senkrecht.—

Wenn also drei rechte Winkel denselben Scheitel haben, so bilden ihre sechs Schenkel ein Involutionsbüschel.—

§. 153. Wenn in einem Involutionsbüschel die Winkel, welche zwei Strahlen mit ihren conjugirten bilden, dieselbe Halbirungslinie haben; so ist diese Gerade auch die Halbirungslinie des Winkels, welchen die beiden andern conjugirten Strahlen miteinander bilden.

Wenn z. B. die beiden Winkel AOA', BOB' dieselbe Halbirungslinie haben, so ist zu beweisen: daß sie auch den Winkel COC' halbirt. —

Diese Gerade und ihr Perpendikel theilen die beiden Winkel AOA', BOB' zugleich harmonisch (§. 52), sind also Doppelstrahlen (§. 150), und theilen folglich den dritten Winkel COC' harmonisch, und sind, weil sie aufeinander senkrecht sind, die Halbirungslinien dieses Winkels und seines Supplementes. Folglich ꝛc.

§. 154. Homographische Involutionsbüschel. — Wenn man von demselben Punkte nach den Punkten zweier homographischer Involutionstheilungen Gerade zieht, so bilden diese zwei Büschel, welche wir homographische Involutionsbüschel nennen wollen, deren Eigenthümlichkeit offenbar darin besteht: daß eine Gerade, welche successive als Strahl beider Büschel betrachtet wird, in beiden Fällen denselben conjugirten Strahl hat. —

Wenn z. B. sechs Gerade ein erstes Büschel bilden, und man errichtet in ihrem Durchschnittspunkte auf ihnen Perpendikel, so

bilden dieſe ein zweites Büſchel, welches mit dem erſten in Involution iſt. Denn eine als dem erſten Büſchel angehörig betrachtete Gerade hat in dem zweiten ihr Perpendikel zur conjugirten, und als dem zweiten Büſchel zugehörig betrachtet, hat ſie in dem erſten noch daſſelbe Perpendikel zur conjugirten Geraden, worin eben die charakteriſtiſche Eigenſchaft der homographiſchen Involutionsbüſchel beſteht. —

§. 155. In zwei homographiſchen Involutionsbüſcheln gibt es immer ein Paar aufeinander ſenkrechter conjugirter Strahlen; aber auch nur eins. —

Denn zieht man eine Transverſale, welche die Strahlen beider Büſchel in paarweiſe conjugirten Punkten a, a'; b, b'; c, c', *etc.* ſchneidet; ſo gehen die um die Segmente aa', bb', ... als Durchmeſſer beſchriebenen Kreiſe alle durch dieſelben beiden reellen, oder imaginären Punkte (§. 126). Durch dieſe beiden Punkte und durch den Mittelpunkt des Büſchels kann man aber immer einen Kreis legen, welcher auf der Transverſale zwei conjugirte Punkte beſtimmt, und die von dem Mittelpunkte der beiden Involutionsbüſchel nach dieſen beiden Punkten gezogen Geraden ſind zwei conjugirte Strahlen, welche offenbar auf einander ſenkrecht ſind. — Hieraus folgt:

Wenn in zwei homographiſchen Involutionsbüſcheln zwei Strahlen des einen reſp. auf ihren conjugirten ſenkrecht ſind, ſo iſt daſſelbe mit allen andern conjugirten Strahlen der Fall —

In dieſem beſondern Falle zweier Involutionsbüſchel ſind die Doppelſtrahlen offenbar imaginär. —

§. 156. In zwei homographiſchen Involutionsbüſcheln gibt es immer zwei homologe Strahlen, welche gegen einen gegebenen Strahl gleiche Neigung haben; aber nur zwei. —

Denn eine auf dem gegebenen Strahle ſenkrechte Transverſale trifft die homologen Strahlen beider Büſchel in Punkten a, a'; b, b'.... welche zwei Involutionstheilungen bilden, und den gegebenen Strahl in einem Punkte γ. Nun gibt es aber ein Paar conjugirter Punkte c, c', deſſen Mitte der Punkt γ iſt; aber nur eins, und die durch dieſe beiden Punkte c, c' gehenden Strahlen beider Büſchel ſind offenbar gegen den gegebenen Strahl gleich geneigt. —

In einem besondern Falle der Involution kann jedoch ein Punkt γ die Mitte aller Segmente sein (§. 122), und alsdann ist die gegebene Gerade die Halbirungslinie aller von je zwei conjugirten Strahlen gebildeten Winkel. —

§. 157. Ausdrucksweisen, daß zwei homographische Büschel in Involution sind. — Das Merkmal der homographischen Involutionsbüschel besteht darin: daß jeder Strahl, wenn er nacheinander als dem einen, oder dem andern der beiden Büschel angehörig betrachtet wird, stets denselben conjugirten Strahl hat (§. 154) — und damit zwei Büschel in Involution sind, braucht diese Bedingung nur für einen gegebenen Strahl stattzufinden, wie solches unmittelbar aus dem analogen Satze für zwei homographische Involutionstheilungen folgt (§. 147), und der Beweis desselben ist auch in dem gegenwärtigen Falle anwendbar.—

Wenn die beiden veränderlichen Strahlen in der Gleichung, welche die Homographie der beiden Büschel ausdrückt, symmetrisch vorkommen, so wird die Bedingung der Involution erfüllt, wie bei homographischen Theilungen (§. 149). Hiernach drückt jede der folgenden Gleichungen aus: daß die beiden veränderlichen Strahlen M, M' zwei Involutionsbüschel bilden:

$$(1) \qquad \frac{\sin(E,M)}{\sin(F,M)} = -\frac{\sin(E,M')}{\sin(F,M')},$$

wo E, F zwei Doppelstrahlen der Involution sind;

$$(2) \qquad \frac{\sin(A,M)\,.\,\sin(A,M')}{\sin(A',M)\,.\,\sin(A',M')} = \lambda,$$

wo A, A' zwei beliebige conjugirte Strahlen sind;

$$(3) \qquad \mathrm{tang}(O,M)\,.\,\mathrm{tang}(O,M') = \lambda,$$

wo O einer der beiden conjugirten rechtwinkligen Strahlen ist, welche in zwei Involutionsbüscheln immer vorkommen (§. 155). Diese letzte Gleichung folgt aus der vorhergehenden, wenn A, A' zwei aufeinander senkrechte conjugirte Strahlen sind. — Hieraus folgt eine sehr wichtige Eigenschaft eines sechsstrahligen Involutionsbüschels; nämlich: wenn $A,A'; B,B'; C,C'$ die sechs paarweise

conjugirten Strahlen sind, so existiren zwei Strahlen O, wovon jeder die Gleichungen gibt:

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{l} tang\,(O,A)\,.\,tang\,(O,A') = tang\,(O,B)\,.\,tang\,(O,B') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = tang\,(O,C)\,.\,tang\,(O,C') \end{array} \right.$$

welche denen für den Centralpunkt analog sind (§. 150).

$$(4)\qquad \frac{1}{tang\,(A,M)} + \frac{1}{tang\,(A',M')} = \lambda,$$

wo A, A' zwei beliebige homologe Strahlen sind.

Oder:

$$tang\,(B,M) + tang\,(C',M') = \lambda,$$

wenn B, C' resp. zwei, auf zwei homologen Strahlen A, A' senkrechte Strahlen sind.

$$5)\qquad tang\,(A,M)\,.\,tang\,(A,M') + \lambda\,.\,[tang\,(A,M) + tang\,(A,M')] + \nu = 0,$$

worin A eine beliebige Gerade ist. —

§. 158. Aus der Bedingung der Involution zweier homographischer Büschel (§. 157) und dem Satze in §. 96 folgt:

Zwei beliebige homographische Büschel können immer so gelegt werden, daß sie zwei Involutionsbüschel sind. —

Dieser Satz ist dem für zwei homographische Theilungen (§. 148) analog. —

Hieraus folgt nach dem Satze in §. 155 weiter: Wenn zwei Büschel homographisch sind, so gibt es in dem einen immer zwei auf einander senkrechte Strahlen, deren homologe Strahlen in dem andern Büschel auch auf einander senkrecht sind, und zwar nur ein Paar. —

§. 159. Homographische Theilungen auf derselben Geraden. — Wenn $a, b, c, \ldots$ und $a', b', c', \ldots$ die resp. homologen Punkte zweier homographischer Theilungen auf derselben Geraden sind; so sind die beiden Doppelpunkte e, f mit jeden Systeme von zwei Punktepaaren, etwa a, b' und a', b, in Involution.

Denn das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, e, f der ersten Theilung ist dem der vier entsprechenden Punkte a', b', e, f der zweiten gleich. Nun kann man aber die Aufeinanderfolge der letztern verändern, und sagen: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, e, f dem der vier Punkte b', a', f, e gleich ist, was beweist, daß die drei Segmente $ab', a'b, ef$ in Involution sind (§. 116). Folglich ꝛc.

Hieraus folgt: daß die über den drei Segmenten aa', bb', cc' als Durchmesser beschriebenen Kreise alle drei durch dieselben beiden Punkte gehen (§. 126). Und: die drei Kreise, welche durch denselben Punkt gehen und deren resp. Sehnen die drei Segmente ab', ba', ef sind, gehen alle durch denselben zweiten Punkt (§. 126). —

Wir haben hier vorausgesetzt, daß die beiden Doppelpunkte e, f reell sind, und wollen deshalb noch die beiden folgenden Beweise hinzufügen, wobei diese Punkte reell, oder imaginär sein können, weil nur die Produkte ihrer Abstände von festen Punkten dabei vorkommen. —

Die Doppelpunkte der beiden Theilungen werden nach §. 100 durch die Gleichung bestimmt:

$$(ae)^2 - 2aO \cdot ae + aJ \cdot aa' = 0,$$

und es ist folglich:

$$ae \cdot af = aJ \cdot aa'.$$

Ebenso hat man für einen in der zweiten Theilung genommenen Anfangspunkt b':

$$b'e \cdot b'f = b'J' \cdot b'b;$$

folglich:

$$\frac{ae \cdot af}{b'e \cdot b'f} = \frac{aJ \cdot aa'}{b'J' \cdot b'b}.$$

Aber das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, J, ∞ ist dem der vier Punkte a', b', ∞', J' gleich; folglich:

$$\frac{aJ}{b'J'} = \frac{ab}{b'a'}.$$

Es ist also:

$$\frac{ae \cdot af}{b'e \cdot b'f} = \frac{ab \cdot aa'}{b'b \cdot b'a'},$$

woraus erhellet, daß die drei Punktepaare $a, b'; b, a'; e, f$ eine Involution bilden. —

Oder: Wenn man in der Gleichung (4) in §. 90 den Punkt a mit b' und d' mit c zusammenfallen läßt, so daß die Punkte b und c der ersten Theilung willkürlich bleiben; so wird die Gleichung:

$$\frac{b'm \cdot b'm'}{cm \cdot c'm'} + \ldots + \frac{b'b \cdot c'b'}{cb \cdot c'c} = 0,$$

und die Doppelpunkte werden durch die Gleichung des zweiten Grades:

$$\frac{(b'e)^2}{(ce)^2} + \ldots + \frac{b'b \cdot b'c'}{cb \cdot c'c} = 0$$

bestimmt. —

Man hat demnach die Gleichung:

$$\frac{b'e \cdot b'f}{ce \cdot cf} = \frac{b'b \cdot b'c}{cb \cdot c'c},$$

welche zeigt, daß die drei Punktepaare $b', c; b, c'; e, f$ in Involution sind. —

§. 160. Bestimmung des Mittelpunktes der beiden Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen, wenn drei Paare correspondirender Punkte gegeben sind. —

Es seinen $a, a'; b, b; c, c'$ drei Paare correspondirender Punkte und e, f ihre Doppelpunkte; so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, e der ersten Theilung dem der vier Punkte a', b', c', e der zweiten gleich, so daß man hat:

$$\frac{ea}{eb} : \frac{ca}{cb} = \frac{ea'}{eb'} : \frac{c'a'}{c'b'},$$

oder:

$$\frac{ea \cdot eb'}{eb \cdot ea'} = \frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'}.$$

Nun haben wir aber vorhin gesehen, daß die drei Segmente ab', $a'b, ef$ in Involution sind, und wenn a_1, b_1, O ihre resp. Mittel-

punkte bezeichnen; so hat man:

$$\frac{ea \,.\, eb'}{ea' \,.\, eb} = \frac{O\alpha_1}{O\mathfrak{E}_1}, \text{ (§. 139)}$$

und folglich:

$$\frac{O\alpha_1}{O\mathfrak{E}_1} = \frac{ea}{eb} : \frac{c'a'}{c'b'}.$$

Dieser Ausdruck des Verhältnisses $\frac{O\alpha_1}{O\mathfrak{E}_1}$ gibt die Lage des gesuchten Punktes O. — Das Doppelverhältniß läßt sich auch auf ein einfaches Verhältniß zurückführen (Vergl. §§. 201 und 214).

§. 161. Construction der beiden Doppelpunkte, wenn ihr Mittelpunkt bekannt ist. — Nachdem die Mitte O der beiden Doppelpunkte e, f gefunden ist, kann man auch ihren Abstand von diesem Punkte finden, wenn man die Gleichung (1) in §. 134 auf die drei Segmente ab', $a'b$, ef anwendet, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$Oa \,.\, Ob' \,.\, \mathfrak{E}_1 O + Ob \,.\, Oa' \,.\, O\alpha_1 = (Oe)^2 \,.\, \alpha_1 \mathfrak{E}_1 = 0,$$

aus welcher folgt:

$$(Oe)^2 = \frac{Oa \,.\, Ob' - \lambda \,.\, Ob \,.\, Oa'}{1 - \lambda},$$

wo $\frac{O\alpha_1}{O\mathfrak{E}_1} = \lambda$ gesetzt ist. —

§. 162. Construction der beiden Doppelpunkte ohne Kenntniß ihres Mittelpunktes. — Der Satz in §. 159 gibt eine sehr einfache Construction der beiden Doppelpunkte. — Durch einen willkürlichen Punkt g lege man zwei Kreise, deren resp. Sehnen die Segmente ab', $a'b$ sind; so schneiden sich dieselben in einem zweiten Punkte g', und durch denselben Punkt g lege man zwei andere Kreise, deren resp. Sehnen die Segmente ac', ac sind, so schneiden sich dieselben in einem zweiten Punkte g''. — Der durch die drei Punkte g, g', g'' gelegte Kreis bestimmt auf der Geraden ab die beiden gesuchten Doppelpunkte; denn diese Punkte sind einerseits mit den beiden Punktepaaren a, b'; a', b und andrerseits mit den beiden Paaren a, c'; a', c in Involution (§. 126). —

Diese Construction ist in allen Fällen anwendbar, welche die drei Paare a, a'; b, b'; c, c' darbieten können — und sie vereinfacht sich, wenn zwei dieser Punkte, etwa b und c', in unendlicher Entfernung liegen. Wenn z. B. der Punkt b in unendlicher Entfernung liegt, so wird der Kreis, welcher durch die drei Punkte g, a', b gehen muß, eine gerade Linie, nämlich $g\,a'$. —

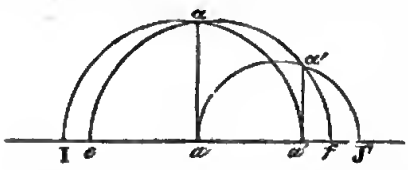
Oder: Man beschreibt um die vier Segmente ab', ba', ac', ca' als Durchmesser Kreise, und legt durch die Durchschnittspunkte der beiden ersten sowie durch die der beiden letzten einen Kreis; so bestimmt derselbe auf der Geraden abc die beiden gesuchten Punkte (§. 126).

Diese zweite Construction ist ebenfalls auf alle Fälle anwendbar, welche hinsichtlich der Lage der Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' vorkommen können. —

Wenn die beiden Punkte b, c' in unendlicher Entfernung angenommen, und ihre homologen b', c in der zweiten und ersten Theilung resp. mit J', J bezeichnet werden, so daß die beiden homographischen Theilungen durch die Gleichung:

$$Jm \,.\, J'm' = Ja \,.\, J'a'$$

ausgedrückt werden (§. 79); so geht der über dem unendlichen Segmente $a'b$ als Durchmesser beschriebene Kreis in das im Punkte a' auf der Geraden ab errichteten Perpendikel über, und ebenso der Kreis, dessen Durchmesser das unendliche Segment ac' ist. — Hieraus ergibt sich folgende Construction:



Ueber $a'J$ als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, und errichte im Punkte a ein Perpendikel, welches den Kreis im Punkte α trifft. Dann beschreibe man über aJ' als Durchmesser einen zweiten Kreis, und errichte das Perpendikel $a'\alpha'$, welches den Kreis in α' trifft. Endlich lege man durch die beiden Punkte α, α' einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf $a\,a'$ liegt; so bestimmt derselbe auf dieser Geraden die beiden gesuchten Punkte. —

Da der Mittelpunkt dieses Kreises der dieser beiden Punkte ist, so ist derselbe *a priori* bekannt nämlich die Mitte von JJ' (§. 100). Man braucht also zur Bestimmung des Kreises nur einen der beiden Punkte α, α' zu construiren. —

Wenn man die Mitte des Segmentes JJ' als den Punkt a

nimmt, so ist der Halbmesser des Kreises $aa' = \sqrt{aa' \cdot aJ'}$. Dieser Ausdruck, zu welchem wir auf einem andern Wege gelangt sind (§. 102), ergibt sich hier also aus der geometrischen Construction. —

§. 163. Wenn einer der Doppelpunkte gegeben ist, z. B. e, so sind die beiden Punktepaare a, a'; b, b' zur Bestimmung des zweiten f hinreichend. Denn beschreibt man über den beiden Segmenten $ab', a'b$ als Durchmesser zwei Kreise, und legt durch ihre Durchschnittspunkte und durch den Punkt e einen dritten Kreis; so bestimmt derselbe den Punkt f (§. 159).

§. 164. Wenn zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden gemacht sind, so hat jeder Punkt a dieser Geraden, wenn er als der ersten Theilung angehörig betrachtet wird, seinen homologen Punkt a' in der zweiten Theilung, und wenn er als der zweiten Theilung angehörend betrachtet wird, seinen homologen Punkt A in der ersten. —

Die beiden Punkte a', A bilden zwei homographische Theilungen, und diese haben dieselben Doppelpunkte, als die beiden gegebenen Theilungen. —

Denn 1) sind die durch den Punkt a' und durch den Punkt A gebildeten beiden Theilungen homographisch unter sich, weil sie zu einer dritten durch den Punkt a gebildeten Theilung homographisch sind. — 2) Wenn der Punkt a ein Doppelpunkt der gegebenen beiden Theilungen ist, so fallen a', A beide mit a zusammen, welcher mithin ein Doppelpunkt der beiden durch die veränderlichen Punkte a', A gebilden Theilungen ist. —

§. 165. Wenn zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden gemacht sind, und man nimmt die homologen Punkte a', A eines Punktes a dieser Geraden wie im vorhergehenden Satze; so ist der harmonisch conjugirte Punkt von a in Bezug auf A und a' derselbe, wie in Beziehung auf die beiden Doppelpunkte der homographischen Theilungen. —

Denn die beiden homographischen Theilungen werden nach §. 100 ausgedrückt durch die Gleichung:

$$am \cdot am' - aJ' \cdot am - aJ \cdot am' + aJ \cdot aa' = 0,$$

oder $(aJ' \cdot aA)$. (§. 100).

Zur Bestimmung der beiden Doppelpunkte e, f muß man m' mit m zusammenfallen lassen, wodurch die Gleichung wird, wenn man e für m setzt:

$$(a\,e)^2 - (a\,J' + a\,J)\,.\,a\,e + a\,J\,.\,a\,a' = 0$$

oder $(a\,J'\,.\,a\,A)$.

Man hat folglich:

$$a\,e + a\,f = a\,J + a\,J',$$

und:

$$a\,e\,.\,a\,f = a\,J\,.\,a\,a' = a\,J'\,.\,a\,A,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{a\,e} + \frac{1}{a\,f} = \frac{1}{a\,a'} + \frac{1}{a\,A}.$$

Nun sei α der harmonisch conjugirte Punkt von a in Beziehung auf a', A, so hat man:

$$\frac{2}{a\,\alpha} = \frac{1}{a\,a'} + \frac{1}{a\,A};\ (\S.\ 37)$$

folglich:

$$\frac{2}{a\,\alpha} = \frac{1}{a\,e} + \frac{1}{a\,f},$$

woraus erhellet, daß α der harmonisch conjugirte Punkt von a in Beziehung auf die beiden Doppelpunkte e, f ist. —

Da der Punkt a und sein harmonisch conjugirter α in Bezug auf seine beiden homologen Punkte a', A das feste Segment $e\,f$ harmonisch theilen; so folgt: daß diese beiden Punkte a, α zwei homographische Involutionstheilungen bilden (§. 149).

Wenn zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden gegeben sind, so kann man leicht den harmonisch conjugirten eines Punktes in Beziehung auf die beiden unbekannten Doppelpunkte der beiden Theilungen finden. —

Denn es sei a der gegebene Punkt, und man bestimme seine beiden homologen a', A, sowie seinen harmonisch conjugirten Punkt α in Bezug auf a', A; so ist α der gesuchte Punkt.

Hieraus ergibt sich auch eine neue Construction der beiden Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen. — Man

nimmt nämlich einen Punkt a und den entsprechenden Punkt α, sowie einen Punkt b und den entsprechenden Punkt β, und sucht endlich die beiden Punkt e, f, welche die beiden Segmente $a\alpha$, $b\beta$ harmonisch theilen; so sind diese die beiden gesuchten Doppelpunkte. —

Weitere Sätze über die Involution.

§. 166. Wenn auf derselben Geraden zwei Paare von Segmenten aa', bb' und AA', BB' gegeben sind, so kann man immer ein Segment cc' finden, welches sowohl mit den beiden ersten Segmenten aa', bb' wie mit den beiden letzten AA', BB' in Involution ist. —

Denn beschreibt man über den vier Segmenten aa', bb', AA', BB' als Durchmesser Kreise, so bestimmt der Kreis, welcher durch die Durchschnittspunkte der beiden ersten, sowie durch die der beiden letzten Kreise geht, das gesuchte Segment cc' (§. 126). —

Wenn sich der Kreis nicht construiren läßt, so ist das Segment imaginär.

Oder: Man zieht durch einen willkürlichen Punkt g zwei Kreise, wovon der eine durch die beiden Punkte a, a' und der andere durch die beiden Punkte b, b' geht, welche sich in einem zweiten Punkte g' schneiden — und durch denselben Punkt g zwei andere Kreise, wovon der eine durch die beiden Punkte A, A' und der andere durch die beiden Punkte B, B' geht, welche sich in einem zweiten Punkte g'' schneiden; so bestimmt der durch die drei Punkte g, g', g'' gehende Kreis auf der Geraden aa' das gesuchte reelle, oder imaginäre (?) Segment. —

Oder: Es sei γ die Mitte des gesuchten Segmentes cc', O der Centralpunkt der durch die beiden Segmente aa', bb' und Q der Centralpunkt der durch die beiden Segmente AA', BB' bestimmten Involution, und endlich ω die Mitte von O, Q; so hat man die Relation:

$$2\omega\gamma . OQ = Oa . Oa' - QA . QA',$$

welche die Lage des Punktes γ bestimmt. —

In der That hat man:

$$Oa . Oa' = Oc . Oc', QA . QA' = Qc . Oc',$$

so daß die Gleichung in folgende übergeht:

$$2\omega\gamma \cdot OQ = Oc \cdot Oc' - Qc \cdot Qc',$$

welches eine zwischen den Punktepaaren c, c'; O, Q und ihren Mitten γ, ω stattfindende Relation ist, die sich leicht beweisen läßt; denn man braucht nur für $Oc \cdot Oc'$ und $Qc \cdot Qc'$ resp. zu setzen:

$$(O\gamma)^2 - (\gamma c)^2 \text{ und } (Q\gamma)^2 - (\gamma c)^2.$$

Ist die Mitte γ des gesuchten Segmentes auf diese Weise gefunden, so ergibt sich dieses Segment selbst durch eine der Relationen:

$$(\gamma c)^2 = (O\gamma)^2 - Oa \cdot Oa',$$

$$(\gamma c)^2 = (Q\gamma)^2 - QA \cdot QA',$$

und ist also stets reell, wenn die beiden Segmente aa, bb', oder AA', BB' ineinandergreifen, weil alsdann das Produkt $Oa.Oa'$ oder $QA.QA'$ negativ ist (§. 120); aber es kann imaginär werden, wenn weder die beiden Segmente aa', bb', noch die beiden Segmente AA', BB' ineinandergreifen. —

Jedes der vier Segmente $aa', bb', \ldots$ kann Null sein, und wenn sie es alle vier zugleich sind; so ist die Aufgabe: Zwei Punkte zu finden, welche zwei Segmente ab, AB harmonisch theilen. —

§. 167. Wenn zwei homographisch getheilte Gerade gegeben sind, so bilden die von einem festen Punkte durch die Theilungspunkte gezogenen Geraden zwei homographische Büschel — und wenn diese Büschel in Involution sein sollen; so muß ihr Scheitel auf der Geraden liegen, welche die Punkte der beiden Theilungen verbindet, deren homologe im Durchschnittspunkte dieser Geraden zusammenfallen. —

Denn es sei S dieser Durchschnittspunkt und a, b' auf den beiden Geraden resp. die beiden fraglichen Punkte, so daß a auf der ersten dem Punkte S der zweiten, und b' auf der zweiten dem Punkte S auf ersten entspricht. Da die Spitze O der beiden Büschel auf der Geraden ab' liegt, so hat diese Gerade, sie mag als Strahl des ersten, oder zweiten Büschels betrachtet werden, stets dieselbe Gerade OS zum homologen Strahl, woraus folgt: daß die beiden Büschel in Involution sind (§. 154).

§. 168. Wenn zwei homographiſche Büſchel gegeben ſind, deren Mittelpunkte nicht zuſammenfallen, ſo kann man ſie mit einer Geraden ſo durchſchneiden, daß man auf derſelben zwei Involutionstheilungen hat — und zwar gibt es unendlich viele ſolcher Geraden, welche aber alle durch einen beſtimmten Punkt gehen. —

Denn es ſeien O, O' die Mittelpunkte der beiden Büſchel, und Q der Durchſchnittspunkt der Strahlen, welche in dem erſten und zweiten Büſchel reſp. die homologen der nach der Geraden OO' zuſammenfallenden Strahlen ſind; ſo genügt jede durch den Punkt Q gehende Transverſale der ausgeſprochenen Bedingung; d. h. ſie ſchnetdet die beiden Büſchel in zwei Reihen von Punkten, welche zwei homographiſche Involutionstheilungen bilden. Denn dieſe Transverſale trifft die Gerade OO' in einem Punkte, welcher, er mag als der erſten, oder zweiten Reihe angehörig betrachtet werden, ſtets denſelben homologen Punkt Q hat. — Folglich ꝛc.

§. 169. Wenn drei Punktepaare $a, a'; b, b'; c, c'$ in Involution ſind, und man nimmt die harmoniſch conjugirten Punkte α, ε von c in Beziehung auf die beiden Segmente aa', bb', ſowie die harmoniſch conjugirten Punkte α_1, ε_1 von α, ε in Bezug auf die beiden Segmente bb', aa'; ſo iſt der Punkt c' der harmoniſch conjugirte von c in Beziehung auf die beiden Punkte α_1, ε_1.

Denn wenn man durch die Gleichung (19) in §. 49 mit zwei willkürlichen Punkten ausdrückt: daß die beiden Punkte α, α_1 in Bezug auf b, b' harmoniſch conjugirt ſind, indem man c', c reſp. für m, n ſetzt; ſo hat man:

$$\frac{c'b \cdot c'b'}{cb \cdot cb'} + \frac{c'a \cdot c'a_1}{ca \cdot ca_1} = 2 \cdot \frac{c'\varepsilon}{cb} \cdot \frac{c'\omega}{c\omega},$$

wo ω der harmoniſch conjugirte Punkt von c in Bezug auf α, α_1 iſt. Dieſe harmoniſche Relation für die beiden Punktepaare c, ω; α, α_1 wird aber auch ausgedrückt durch:

$$2 \frac{c'\omega}{c\omega} = \frac{c'a}{ca} + \frac{c'a_1}{ca_1}. \quad (\text{§. 39})$$

Man hat alſo:

$$\frac{c'b \cdot c'b'}{cb \cdot cb'} + \frac{c'a \cdot c'a_1}{ca \cdot ca_1} = \frac{c'\varepsilon}{c\varepsilon}\left(\frac{c'a}{ca} + \frac{c'a_1}{ca_1}\right)$$

und ebenso wird die harmonische Relation der beiden Punktepaare $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1$; a, a' ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{c'a \cdot c'a'}{ca \cdot ca'} + \frac{c'\mathfrak{C} \cdot c'\mathfrak{C}_1}{cb \cdot c\mathfrak{C}_1} = \frac{c'\alpha}{c\alpha}\left(\frac{c'\mathfrak{C}}{c\mathfrak{C}} + \frac{c'\mathfrak{C}_1}{c\mathfrak{C}_1}\right).$$

Wenn man diese beiden Gleichungen voneinander abzieht, und bemerkt, daß $\frac{c'\mathfrak{C}_1}{c\mathfrak{C}_1} = -\frac{c'\alpha_1}{c\alpha_1}$ ist, weil c' der harmonisch conjugirte Punkt von c in Bezug auf $\alpha_1, \mathfrak{C}_1$ ist; so bleibt blos:

$$\frac{c'a \cdot c'a'}{ca \cdot ca'} = \frac{c'b \cdot c'b'}{cb \cdot cb'},$$

welches eine der Involutionsgleichungen in §. 117 ist. — Folglich ꝛc.

Wenn der Punkt c in unendlicher Entfernung liegt, so fällt sein conjugirter Punkt c' mit der Mitte des Segmentes $\alpha_1 \mathfrak{C}_1$ zusammen, und ist der Centralpunkt der durch die beiden Segmente $a\,a', b\,b'$ bestimmten Involution. —

Die beiden Punktepaare a, a'; b, b' können auch imaginär sein, weil nur harmonische Relationen derselben betrachtet werden. — Man kann also vermittelst der beiden vorhergehenden Sätze den Centralpunkt und den conjugirten eines gegebenen Punktes einer durch zwei Paare imaginärer Punkte bestimmten Involution bestimmen. —

§. 170. Wenn auf derselben Geraden zwei Punktepaare a, a'; b, b' gegeben sind, und man nimmt den harmonisch conjugirten Punkt c von b in Beziehung auf a, a', sowie den harmonisch conjugirten Punkt c' von b' ebenfalls in Bezug auf a, a'; so sind die drei Segmente aa', bb', cc' in Involution. —

Denn nach der Voraussetzung hat man:

$$\frac{ac}{ab} = -\frac{a'c}{a'b}, \quad \frac{ac'}{ab'} = -\frac{a'c'}{a'b'},$$

und wenn man diese Gleichheiten in einander multiplicirt; so erhält man die Gleichung:

$$\frac{ac \cdot ac'}{ab \cdot ab'} = \frac{a'c \cdot a'c'}{a'b \cdot a'b'},$$

welche ausdrückt: daß die drei Segmente aa', bb', cc' in Involution sind (§. 117).

Man kann auch sagen: Wenn drei Punktepaare $a, a; b, b'; cc'$ in Involution sind, und die beiden Punkte b, c sind in Beziehung auf a, a' harmonisch conjugirt; so sind b', c' ebenfalls in Bezug auf a, a' harmonisch conjugirt. —

§. 171. Wenn zwei Punktepaare $a, a'; b, b'$ in harmonischer Relation sind, und man nimmt auf derselben Geraden einen willkürlichen Punkt n, sowie seine harmonisch conjugirten Punkte c, c' in Bezug auf die beiden Segmente aa', bb'; so bilden die drei Punktepaare $a, a'; b, b'; c, c'$ eine Involution. —

Denn die beiden Punkte a, a' theilen jedes der beiden Segmente bb', cn harmonisch, und mithin sind a, a' die Doppelpunkte der durch diese beiden Segmente bestimmten Involution (§. 127); also sind die drei Segmente $aa', bn, b'c$ in Involution (§. 128), und man hat:

$$\frac{ba \,.\, ba'}{na \,.\, na'} = \frac{bb' \,.\, bc}{nb' \,.\, nc}. \quad \text{(§. 117).}$$

Ebenso sind die drei Segmente $aa', b'n, bc$ in Involution und man hat:

$$\frac{b'a \,.\, b'a'}{na \,.\, na'} = \frac{b'b \,.\, b'c}{nb \,.\, nc},$$

und wenn man diese Gleichungen in einander dividirt; so erhält man:

$$\frac{ba \,.\, ba'}{b'a \,.\, b'a'} = -\frac{bc}{nb'} : \frac{b'c}{nb} = -\frac{bc}{b'c}\,\frac{nb}{nb'}.$$

Da nun c' der harmonisch conjugirte Punkt von n in Bezug auf b, b' ist, so hat man:

$$\frac{nb}{nb'} = -\frac{cb'}{c'b'},$$

und die letzte Gleichung wird folglich:

$$\frac{ba \,.\, ba'}{b'a \,.\, b'a'} = \frac{bc \,.\, bc'}{b'c \,.\, b'c'},$$

woraus erhellet: daß die drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' eine Involution bilden. —

Wenn der Punkt n die Mitte des Segmentes aa' ist, so liegt sein conjugirter Punkt c in unendlicher Entfernung, und folglich ist der Punkt c' der Centralpunkt der Involution, welche durch die zwei Segmente aa', bb' bestimmt wird. — Hieraus folgt:

Wenn zwei Punktepaare a, a'; b, b' in harmonischer Proportion sind, so fällt der harmomisch conjugirte Punkt der Mitte des Segmentes aa' in Beziehung auf die beiden Punkte b, b' mit dem harmonisch conjugirten Punkte der Mitte des Segmentes bb' in Beziehung auf a, a' zusammen — und dieser Punkt ist der Centralpunkt O der durch die beiden Punktepaare a, a'; b, b' bestimmten Involution; d. h. man hat für diesen Punkt O die Relation:

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, O'b.$$

Oder: Da die beiden Punktepaare a, a'; b, b' in harmonischer Proportion sind, so hat man die Relation:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{na \,.\, na'} + \frac{mb \,.\, mb'}{nb \,.\, nb'} = 2 \,.\, \frac{mc \,.\, mc'}{nc \,.\, nc'}. \quad (\S.\ 49)$$

und wenn γ den harmonisch conjugirten Punkt von n in Bezug auf c, c' bezeichnet; so ist:

$$n\gamma \,.\, cc' = 2nc' \,.\, c\gamma = -\,2nc \,.\, c'\gamma. \quad (\S.\ 37).$$

Man kann also schreiben:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{na \,.\, na'} \,.\, nc \,.\, c'\gamma + \frac{mb \,.\, mb'}{nb \,.\, nb'} \,.\, nc' \,.\, \gamma c = \frac{mc \,.\, mc'}{nc \,.\, nc'} \,.\, n\gamma \,.\, c'c,$$

oder:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{na \,.\, na'} \,.\, c'\gamma \,.\, nc + \frac{mb \,.\, mb'}{nb \,.\, nb'} \,.\, \gamma c \,.\, nc' + \frac{mc \,.\, mc'}{nc \,.\, nc'} \,.\, cc' \,.\, n\gamma = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt, daß die drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' in Involution sind (§. 142).

Oder: Der Lehrsatz findet offenbar für jede Lage des Punktes n statt, wenn er für eine Lage desselben stattfindet — und z. B. n in unendlicher Entfernung liegt, weil in den zwischen den verschiedenen Punkten stattfindenden Relationen nur anharmonische

Verhältnisse vorkommen. — Wenn aber der Punkt n in unendlicher Entfernung liegt, so sind die Punkte c, c' die Mitten α, ε der beiden Segmente aa', bb' — und es braucht nur bewiesen zu werden: daß die drei Segmente $aa', bb', \alpha\varepsilon$ eine Involution bilden. — Zu den Zwecke kann man sich der Gleichungen in §. 139 bedienen — und wenn ε die Mitte von $\alpha\varepsilon$ ist; so findet die Involution statt, wenn man hat:

$$\frac{\alpha a \,.\, \alpha a'}{\alpha b \,.\, \alpha b'} = \frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\varepsilon} \text{ oder: } \frac{-(\alpha a)^2}{\alpha b \,.\, \alpha b'} = \frac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\varepsilon}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber $= -1$, weil die beiden Segmente aa', bb' in harmonischer Proportion sind (§. 44), und der zweite Theil ist auch $= -1$, weil ε die Mitte von $\alpha\varepsilon$ ist; folglich ꝛc.

Die über den Segmenten $aa', bb', \alpha\varepsilon$ beschriebenen drei Halbkreise gehen durch denselben Punkt (§. 126), und die von diesem Punkte nach den beiden Punkten α, ε gezogenen Geraden sind aufeinander senkrecht und Halbmesser der beiden ersten Kreise. Wenn man folglich über zwei in harmonischer Relation stehenden Segmenten aa', bb' als Durchmesser Kreise beschreibt, so durchschneiden sich dieselben unter **rechten** Winkeln. —

Oder: Wenn der Punkt n seine Lage ändert, so bildet er mit c zwei homographische Theilungen, weil man immer hat: $\frac{ac}{ac'} = -\frac{an}{a'n}$; und dasselbe gilt von den Punkten n, c'. — Die beiden Punkte c, c' bilden also zwei homographische Theilungen. — Wenn n in a fällt, so fällt c auch in a, und c' in a'. Mithin sind a, a' zwei homologe Punkte der beiden von c, c' gebildeten homographischen Theilungen — und dasselbe gilt von b, b'. — Aber wenn n in a' fällt, so liegt c auch in a' und c' fällt in a. Der Punkt a hat also, er mag als der ersten, oder als der zweiten Theilung angehörig betrachtet werden, in beiden Fällen den Punkt a' zum homologen, woraus folgt: daß die beiden Theilungen in Involution sind (§. 147). Also sind die drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' in Involution. — W. z. b. w.

§. 171. Drei von demselben Punkte ausgehende Gerade bilden je zwei und zwei betrachtet, drei Winkel, und die Halbirungslinien dieser Winkel und deren Supplemente haben die Eigenschaft,

daß die drei Geraden mit den Halbirungslinien der drei Supplemente, oder mit zwei derselben und der Halbirenden des dritten Winkels in Involution sind. —

Denn es seien A, B, C die drei Geraden, A', B', C' die Halbirenden der drei Winkel (B, C), (C, A), (A, B) und A'', B'', C'' die der Supplemente dieser Winkel; so hat man:

$$\frac{\sin(A', C)}{\sin(A', B)} = -1, \frac{\sin(B', A)}{\sin(B', C)} = -1, \frac{\sin(C', B)}{\sin(C', A)} = -1,$$

$$\frac{\sin(A'', C)}{\sin(A'', B)} = 1, \frac{\sin(B'', A)}{\sin(B'', C)} = 1, \frac{\sin(C'', B)}{\sin(C'', A)} = 1;$$

folglich:

$$\frac{\sin(A, B'') \cdot \sin(B, C'') \cdot \sin(C, A'')}{\sin(A'', B) \cdot \sin(B'', C) \cdot \sin(C'', A)} = -1,$$

$$\frac{\sin(A, B') \cdot \sin(B, C') \cdot \sin(C, A')}{\sin(A', B) \cdot \sin(B', C) \cdot \sin(C', A)} = -1,$$

welche Gleichungen die fragliche Involution ausdrücken (§. 150).

Zweite Abtheilung.

Anwendung der vorhergehenden Theorien.

I. Geradlinige Figuren.

§. 172. Aufgabe vom bestimmten Schnitt. — Diese von Apollonius so genannte Aufgabe ist folgende:

Wenn auf einer Geraden vier Punkte gegeben sind, auf derselben einen fünften Punkt von solcher Beschaffenheit zu bestimmen: daß das Produkt seiner Abstände von zwei der vier gegebenen Punkte zu dem Produkte seiner Abstände von den beiden andern in einem gegebenen Verhältniß steht. —

Wenn a, a'; b, b' die vier gegebenen Punkte sind, und λ bezeichnet das gegebene Verhältniß; so kommt es darauf an, einen solchen Punkt m zu bestimmen, daß man hat:

$$(\alpha) \qquad \frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \lambda.$$

Diese Aufgabe enthält drei andere als besondere Fälle; denn man kann annehmen: daß einer der vier gegebenen Punkte (b') in unendlicher Entfernung liegt, oder daß zwei conjugirte Punkte a, a' oder b, b' in einen zusammenfallen. — Die diesen drei Annahmen entsprechenden drei Fälle werden durch die drei Gleichungen ausgedrückt:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm} = \lambda.$$

$$\frac{(am)^2}{bm \cdot b'm} = \lambda,$$

$$\frac{am \cdot a'm}{(bm)^2} = \lambda.$$

Um den Ausdruck $\frac{am \cdot a'm}{bm} = \lambda$ als besondern Fall von $\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \lambda$ betrachten zu können, kann man in letzterm die Constante λ durch das Verhältniß zweier Segmente $bk, b'k'$ ersetzen, wo die beiden Punkte k, k' in derselben Geraden wie $a, a'; b, b'$ so liegen, daß man hat:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \frac{bk}{b'k'} \text{ oder } \frac{am \cdot a'm}{bm} = bk \cdot \frac{b'm}{b'k'}.$$

Wird jetzt b' in unendlicher Entfernung angenommen, so erhält man:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm} = bk = \lambda.$$

Die vorhergehenden Theorien geben unmittelbar zwei höchst einfache Auflösungsmethoden dieses Problemes vom bestimmten Schnitte, wovon die eine aus der Involution und die andere aus der homographischen Theilung entspringt. Die erste ist sogar in dem Falle anwendbar, wo eins der beiden Punktepaare $a, a'; b, b'$ oder beide imaginär werden. —

Erste Auflösung. — Der Gleichung:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \lambda$$

genügen offenbar zwei Punkte m, m'; denn wenn ein erster Punkt m bestimmt ist, so genügt ein zweiter Punkt m', welcher mit m und $a, a; b, b$ eine Involution bildet, den Bedingungen der Aufgabe auch, weil man hat:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \frac{am' \cdot a'm'}{bm' \cdot b'm'}, \text{ (§. 117).}$$

und mithin:

$$\frac{am' \cdot a'm'}{bm' \cdot b'm'} = \lambda.$$

Nun sei μ die Mitte der beiden gesuchten Punkte m, m', und α, β resp. die der beiden Segmente aa, bb'; so hat man:

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu}; \text{ (§. 139)}$$

folglich:

$$\frac{a\mu}{\mathfrak{C}\mu} = \lambda.$$

Dieſe Relation gibt den Mittelpunkt μ, und die Beſtimmung der beiden Punkte m, m' iſt eine Aufgabe der Theorie der Involution, welche wir auf verſchiedene Arten gelöſ't haben (§. 143), ſo daß wir hier nur noch wenig hinzuzufügen brauchen. —

Conſtruction. — Durch einen willkürlich genommenen Punkt g lege man zwei Kreiſe, deren reſp. Sehnen die Segmente aa', bb' ſind, ſowie durch denſelben Punkt g und durch den andern Durchſchnittspunkt dieſer beiden Kreiſe einen dritten Kreis, deſſen Mittelpunkt auf dem in Punkte μ auf aa' errichteten Perpendikel liegt; ſo beſtimmt derſelbe auf der Geraden aa' die beiden geſuchten Punkte m, m'. —

Oder: Man ſucht den durch die Gleichung:

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'$$

beſtimmten Punkt O, ſowie den durch die Gleichung:

$$Oa \,.\, Oa' = O\mu \,.\, O\mu'$$

beſtimmten Punkte μ'; ſo hat man:

$$(\mu m)^2 = \mu\mu' \,.\, \mu O \text{ (§ 144).}$$

Für drei Punkte a, a', b muß man einen ſolchen Punkt m beſtimmen, daß man hat:

$$\frac{am \,.\, a'm}{bm} = \lambda,$$

und es genügen wieder zwei Punkte m, m' der Aufgabe, welche mit a, a und b, dieſen letzten als Centralpunkt betrachtet, eine Involution bilden. Denn man hat:

$$\frac{am \,.\, a'm}{bm} = \frac{am' \,.\, a'm'}{b'm'},$$

oder:

$$\frac{am \,.\, a'm}{am' \,.\, a'm'} = \frac{bm}{b'm'}. \quad \text{(§. 119)}$$

Die Mitte μ der beiden geſuchten Punkte m, m' wird alſo unmittelbar durch den Ausdruck $a\mu = \frac{1}{2}\lambda$ beſtimmt (§. 135, Gl. (4)).

Construction. — Man beschreibt einen beliebigen durch die beiden Punkt a, a' gehenden Kreis, und zieht durch den Punkt b eine Sekante, welche den Kreis in zwei Punkten g, g' schneidet. Durch diese beiden Punkte zieht man einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem in μ auf aa' errichteten Perpendikel liegt; so bestimmt dieser Kreis die beiden gesuchten Punkte m, m'. —

Oder: Man bestimmt den Punkt μ' durch die Relation:

$$ba \,.\, ba' = b\mu \,.\, b\mu',$$

und hat:

$$(\mu m)^2 = \mu\mu' \,.\, \mu b. \quad (\S.\ 135).$$

Zweite Auflösung. — Schreibt man die Gleichung (α) so:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \,.\, \frac{b'm}{a'm},$$

so sieht man, daß die gesuchten Punkte die Doppelpunkte der durch die Gleichung:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \,.\, \frac{b'm'}{a'm'}$$

ausgedrückten beiden homographischen Theilungen sind, worin a, b zwei Punkte der ersten und b', a' ihre resp. homologen Punkte in der zweiten Theilung sind (§. 63).

Die beiden Doppelpunkte werden durch die Construction in §. 102 bestimmt, wobei man sich der in unendlicher Entfernung liegenden Punkte bedient. — Wenn m' in unendlicher Entfernung angenommen wird, so hat man $\frac{aJ}{bJ} = \lambda$, und wenn man m in unendlicher Entfernung annimmt, $\frac{a'J'}{b'J'} = \lambda$. Nun sei μ die Mitte von JJ', und man bestimme den Punkt μ' durch die Gleichung:

$$\frac{a\mu}{b\mu} = \lambda \,.\, \frac{b'\mu'}{a'\mu'};$$

so hat man:

$$(\mu m)^2 = \mu\mu' \,.\, \mu J'. \quad (\S.\ 102)$$

In dem Falle von drei Punkten a, a', b schreibt man die betreffende Gleichung so:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \,.\, \frac{1}{a'm},$$

woraus erhellet, daß die gesuchten Punkte die Doppelpunkte der durch die Gleichung:

$$\frac{am}{bm} = \lambda . \frac{1}{a'm'}$$

ausgedrückten beiden homographischen Theilungen sind, wo in der zweiten Theilung ein unendlich entfernter Punkt und a' die conjugirten Punkte von a, b in der ersten Theilung sind (§. 78).

Der Punkt J liegt folglich in a und der Punkt J' wird durch die Gleichung $a'J' = \lambda$ bestimmt. Man bestimmt die Mitte μ des Segmentes aJ', hierauf den Punkt μ' durch die Gleichung:

$$\frac{a\mu}{b\mu} = \lambda . \frac{1}{a'\mu'},$$

und die gesuchten Punkte durch die Gleichung:

$$(\mu m)^2 = \mu\mu' .. \mu J'.$$

Wenn die beiden Punkte a, a' zusammenfallen, so sind die beiden Auflösungsmethoden sowohl in dem Falle von vier, wie in dem von drei Punkten ohne Weiteres anwendbar. —

§. 173. Bedingungen der Unmöglichkeit — Grenzen von λ. — Wenn die beiden Segmente aa', bb' in einander greifen, so sind die beiden Punkte m, m' immer reell (§. 143). Aber wenn die beiden Segmente eine andere Lage haben, so können die beiden Punkte m, m' imaginär sein, was der Fall ist, wenn die Mitte μ zwischen den beiden Punkten e, f liegt, welche jedes der beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen (§. 144). Dies ist die einzige Bedingung der Unmöglichkeit der Aufgabe, und wir wollen sehen, was sich hinsichtlich des Zeichens und Zahlenwerthes von λ daraus ergibt, indem wir successive die beiden Fälle betrachten, welche die gegenseitige Lage der beiden Segmente aa', bb' darbieten kann. —

1) Eins der beiden Segmente liegt ganz auf dem andern. — Alsdann liegen die beiden Mittelpunkte α, ε außerhalb des Segmentes ef, und zwar beide auf derselben Seite, zur Linken, oder Rechten (§. 35). Da nun nach der Voraussetzung der Punkt μ auf dem Segmente selbst liegt, so folgt: daß das Verhältniß $\frac{\mu\alpha}{\mu\varepsilon} = \lambda$ positiv ist, und daß sein Zahlenwerth zwischen de-

nen der beiden Verhältniſſe $\frac{e\alpha}{e\varepsilon}$, $\frac{f\alpha}{f\varepsilon}$ liegt. — Dieſes ſind die beiden Bedingungen der Unmöglichkeit der Aufgabe. Wenn λ einem dieſer beiden letzten Verhältniſſe gleich iſt, ſo fallen die beiden Punkte m, m' in einem der beiden Punkte e, f zuſammen, und die beiden Auflöſungen reduciren ſich auf eine. —

2) Die beiden Segmente liegen außereinander. — Alsdann liegen ihre Mitten α, ε wieder außerhalb des Segmentes ef; aber auf verſchiedenen Seiten deſſelben, und da der Punkt μ nach der Vorausſetzung auf dem Segmente ef ſelbſt liegt; ſo folgt: daß das Verhältniß $\frac{\mu\alpha}{\mu\varepsilon}$ negativ iſt, und daß ſein abſoluter Werth zwiſchen den abſoluten Werthen der Verhältniſſe $\frac{e\alpha}{e\varepsilon}$, $\frac{f\alpha}{f\varepsilon}$ liegt. —

Wenn λ einem dieſer letzten Verhältniſſe gleich iſt, ſo ſind die die beiden Auflöſungen reell; aber reduciren ſich wieder auf eine. —

Man kann alſo die beiden Bedingungen der Unmöglichkeit der Aufgabe allgemein dadurch ausdrücken, daß man ſagt: 1) die Conſtante λ muß daſſelbe Zeichen haben, als die beiden Verhältniſſe $\frac{e\alpha}{e\varepsilon}$, $\frac{f\alpha}{f\varepsilon}$, und: 2) ihr Zahlenwerth muß zwiſchen den Zahlenwerthen dieſer beiden Verhältniſſe liegen, welche nach §. 131 ausgedrückt werden durch:

$$\frac{(aa')^2}{(\sqrt{ab'.a'b} \mp \sqrt{ab.a'b'})^2}.$$

Wenn in dem Falle von drei Punkten a, a', b der Punkt b auf dem Segmente aa' liegt, ſo ſind die beiden geſuchten Punkte m, m' immer reell. Liegt der Punkt b außerhalb dieſes Segmentes, ſo ſind die beiden Punkte e, f, welche daſſelbe harmoniſch theilen, und deren Mitte b iſt, reell, und damit die beiden geſuchten Punkte m, m' reell ſind, muß ihre Mitte μ außerhalb des Segmentes ef liegen. — Die Aufgabe iſt alſo unmöglich, wenn der durch $\alpha\mu = \frac{1}{2}\lambda$ beſtimmte Punkt μ zwiſchen die beiden Punkte e, f fällt. — Dieſe Bedingung drückt man dadurch aus, daß man

ſagt: das Segment $\alpha\mu$ liegt zwiſchen den beiden Segmenten αe, αf, und offenbar haben alsdann die drei Segmente daſſelbe Zeichen. Man kann alſo ſagen: die Aufgabe iſt unmöglich, wenn die Conſtante λ daſſelbe Zeichen hat, als die Segmente αe, αf, und wenn ihr abſoluter Werth zwiſchen den abſoluten Werthen dieſer beiden Segmente liegt, welche nach §. 51 ausgedrückt werden durch:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(aa')^2}{(\sqrt{ab.} \mp \sqrt{a'b})^2}.$$

§. 174. Bemerkung über die Zeichen der Segmente und der Conſtante. — Wir haben bisher hinſichtlich des Zeichens der Conſtante λ, welche poſitiv, oder negativ ſein kann, keine Vorausſetzung gemacht; aber die Lage des durch die Relation $\frac{\mu\alpha}{\mu\varepsilon} = \lambda$ oder $\mu\alpha = \frac{1}{2}\lambda$ beſtimmten Punktes μ iſt von dieſem Zeichen abhängig, und die dem einen Zeichen entſprechenden beiden Auflöſungen ſind von den dem entgegengeſetzten Zeichen entſprechenden verſchieden, ſo daß, wenn das Zeichen von λ in der Aufgabe nicht beſtimmt angegeben iſt, dieſe vier Auflöſungen geſtattet. —

Was die Zeichen der Segmente betrifft, ſo iſt in dem Falle von vier Punkten, wo man die Relation:

$$\frac{am.am'}{bm.bm'} = \lambda$$

hat, der Sinn, in welchem die poſitiven Segmente genommen werden, gleichgültig, ſelbſt wenn die beiden Punkte a, a' oder b, b' zuſammenfallen. — Aber in dem Falle von drei Punkten, wo man die Gleichung:

$$\frac{am.am'}{bm} = \lambda$$

hat, iſt dies nicht mehr einerlei; ſondern man muß angeben, in welchem Sinne die poſitiven Segmente zu nehmen ſind, ſo daß man zwei neue Auflöſungen erhält, wenn man dieſe Segmente in entgegengeſetztem Sinne nimmt. — Wenn alſo die Aufgabe dieſen Sinn unbeſtimmt läßt, ſo muß man annehmen, daß ſie vier Auflöſungen geſtattet, welche jedoch dieſelben ſind, als die von der Unbeſtimmt-

heit des Zeichens der Constante λ herrührenden. — Denn wenn ein Punkt m der Gleichung:

$$\frac{am \cdot am'}{bm} = \lambda$$

genügt, indem die positiven Segmente gegen die Rechte zu genommen werden, und die Constante λ positiv ist; so ist dies auch noch der Fall, wenn die positiven Segmente gegen die Linke genommen werden, und die Constante negativ gesetzt wird.

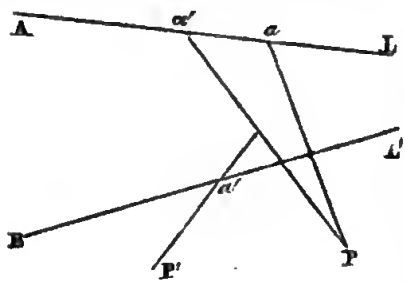
In beiden Fällen — sowohl bei vier, wie bei drei Punkten — gestattet also die Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen, wenn man weder den Segmenten, noch der Constante Zeichen gibt. —

Aufgaben, deren Auflösung sich auf die Construction der Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen zurückführen läßt.

§. 175. Aufgaben dieser Art, welche analytisch von Gleichungen des zweiten Grades abhängen, lassen sich alle durch eine gleichförmige Construction lösen, obgleich sie keine Aehnlichkeit mit einander zu haben scheinen, und diese Construction ist immer sehr einfach, selbst in den Fällen, wo die gewöhnlichen Methoden, besonders wegen der Vielheit der Wurzeln, welche sich bei der Bildung der Gleichung der Aufgabe nicht vermeiden läßt, wirkliche Schwierigkeiten darbieten. — Die beiden homographischen Theilungen werden bei jeder Aufgabe durch drei Paare correspondirender Punkte bestimmt, und die beiden Punkte jedes Paares werden durch eine Art Versuchsconstruction gegeben, welche nur dann richtig ist, wenn die beiden dadurch bestimmten Punkte zusammenfallen. — Diese Methode hat mit der arithmetischen Regel falsi Aehnlichkeit, und verdient wegen ihrer mannigfachen Anwendungen hier besonders beachtet zu werden, weil allgemeine und gleichartige Methoden in der Geometrie noch sehr fehlen. — Zu den leichtesten Aufgaben, worauf diese Methode anwendbar ist, gehören auch die von Apollonius sogenannten Probleme des Verhältnißschnittes, des Raumschnittes und des bestimmten Schnittes. — Die zweite Auflösungsart, welche wir vorhin von dem letzten Probleme gegeben haben, beruht auf dieser Methode, und könnte genügen, um ihre Anwendung zu zeigen; allein wir wollen noch verschiedene andere Anwendungen

derſelben mittheilen, indem wir beſonders Aufgaben wählen, welche viele beſondere Fälle unter ſich begreifen. —

Zwei homographiſche Theilungen auf zwei Geraden geben zwei verſchiedene Arten von Aufgaben. Bei der einen Art handelt es ſich um die Beſtimmung zweier homologer Punkte, welche gewiſſen Bedingungen genügen, und bei der andern Art um die Beſtimmung zweier homologer Segmente, welche ebenfalls gegebenen Bedingungen entſprechen. — Dieſe Aufgaben können ſich unter ſehr verſchiedenen Formen darbieten, allein wir werden hier nur einige Beiſpiele geben, weil die Auflöſungsart ſich ſtets gleichbleibt. —



§. 176. Aufgabe. — Wenn auf zwei Geraden AL, BL' zwei homographiſche Theilungen gegeben ſind, von zwei gegebenen Punkten P, P' zwei Gerade zu ziehen, welche nach zwei homologen Punkten a, a' der beiden Theilungen gehen, und einen gegebenen Winkel mit einander bilden. —

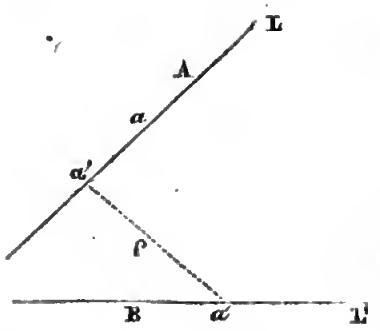
Aufl. Den Punkt a auf der erſten Geraden AL nehme man beliebig an, und beſtimme auf der zweiten Gerade BL' den homologen Punkt a' der zweiten Theilung, ziehe dann die Gerade $P'a'$ und durch den Punkt P eine Gerade, die mit $P'a'$ einen dem gegebenen gleichen Winkel macht; ſo ſchneidet dieſelbe AL in einem Punkte a', und die Punkte a, a' bilden zwei homographiſche Theilungen. Denn die beiden Strahlen $P'a', Pa'$, welche einen Winkel von conſtanter Größe mit einander machen, bilden zwei homographiſche Büſchel (§. 94), und mithin bilden ihre Durchſchnittspunkte a', a' mit den beiden Geraden BL', AL zwei homographiſche Theilungen. Aber a', a bilden nach der Vorausſetzung auch zwei homographiſche Theilungen, und folglich bilden a, a' zwei homographiſche Theilungen (§. 65ᵃ). Jeder der beiden Doppelpunkte dieſer Theilungen gibt offenbar eine Auflöſung der Aufgabe. —

Da man durch den Punkt P zwei Gerade ziehen kann, welche mit $P'a'$ den gegebenen Winkel bilden, ausgenommen, wenn dieſer Winkel ein rechter iſt; ſo hat die Aufgabe im Allgemeinen vier

Auflösungen; aber nur zwei, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist. —

§. 177. Drei solche Punktepaare wie a, a' sind zur Bestimmung der beiden gesuchten Doppelpunkte hinreichend. — Wenn man aber auf der Geraden AL den Punkt a beliebig annimmt, und den Punkt a' nach der Voraussetzung bestimmt, so wie den Strahl Pa' zieht, welcher mit $P'a'$ den gegebenen Winkel bildet; so macht man gleichsam eine Versuchsconstruction, welche richtig wäre, wenn der Strahl Pa' mit Pa zusammenfiele; aber im Allgemeinen einen durch das Segment aa' ausgedrückten Fehler gibt, welcher $= 0$ sein müßte, und mittelst drei solcher durch drei Versuchsconstructionen erhaltenen Fehler wird die Aufgabe gelöst. — Es findet also, wie schon gesagt, zwischen dieser allgemeinen Methode und der arithmetischen Regel falsi eine gewisse Aehnlichkeit statt. — Man kann die Aufgabe noch verallgemeinern, wenn festgesetzt wird: daß die durch die beiden gegebenen Punkte gezogenen beiden Geraden zwei homologe Strahlen zweier gegebener homographischer Büschel sein sollen, statt einen gegebenen Winkel zu bilden. — Aber auch ohne diese Erweiterung gestattet die Aufgabe viele Anwendungen, theils weil die homographischen Theilungen auf den Geraden AL, BL' auf verschiedene Arten gemacht werden können, und theils wegen der darin erhaltenen besondern Fälle; allein wir wollen von diesen vielen Aufgaben nur drei, nämlich die vom Verhältnißschnitt, vom Raumschnitt und vom bestimmten Schnitt hier näher betrachten. Die beiden ersten erscheinen ganz einfach als besondere Fälle der allgemeinen Aufgabe, wenn man die beiden Punkte P, P' in einen zusammenfallen läßt, und den gegebenen Winkel $= 0$ setzt. Für die dritte Aufgabe muß man außerdem noch annehmen, daß die beiden homographischen Theilungen auf derselben Geraden gemacht sind. — Da aber die Auflösung genau die zweite der vorhin bei der direkten Behandlung dieser Aufgabe gegebenen ist, so brauchen wir nicht wieder darauf zurückzukommen.

§. 178. Aufgabe vom Verhältnißschnitt. — Wenn zwei Gerade AL, BL' gegeben sind, durch einen Punkt ϱ eine Transversale zu ziehen, welche auf diesen beiden Geraden zwei von den festen Punkten A, B aus gezählte



Segmente Aa, Ba' bestimmt, die in einem gegebenen Verhältniß stehen. —

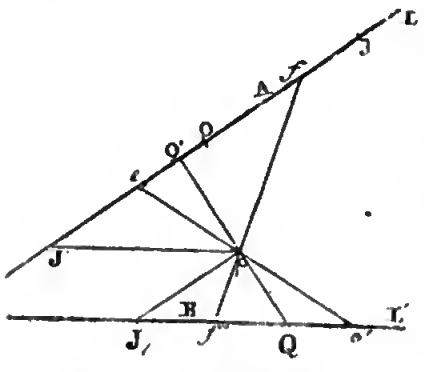
Aufl. Wir wollen uns auf den beiden Geraden AL, BL' zwei veränderliche Punkte a, a' denken, welche durch die Relation:

$$\frac{Aa}{Ba'} = \lambda.$$

mit einander verbunden sind; so bilden dieselben zwei homographische Theilungen, und die Aufgabe ist: durch den Punkt ϱ eine Transversale zu ziehen, welche die beiden Geraden in zwei homologen Punkten dieser beiden Theilungen trifft, was ein besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe ist. —

Wenn also der Punkt a auf der Geraden AL willkürlich angenommen, so wie der Punkt a' nach der Relation $\frac{Aa}{Ba'} = \lambda$ bestimmt wird, und man zieht den Strahl $\varrho a'$, welcher die Gerade AL in einem Punkte α' trifft; so bilden α' und a zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte die beiden Auflösungen der Aufgabe liefern. —

Wenn man sich der beiden Punkte J, J' bedient, welche in den beiden Theilungen den unendlich entfernten Punkten entsprechen; so werden die beiden Doppelpunkte auf folgende Weise construirt: Um den Punkt J (die Lage von a, wenn α' in unendlicher Entfernung liegt) zu bestimmen, ziehe man durch den Punkt ϱ eine Parallele zu AL, welche BL' in J_1 trifft, und nehme $\frac{AJ}{BJ_1} = \lambda$. Der Punkt J' (die Lage von α', wenn a in unendlicher Entfernung liegt) wird unmittelbar durch die zu BL' parallele Gerade $\varrho J'$ bestimmt. Es sei O die Mitte des Segmentes JJ', so muß man diesen Punkt als eine Lage des Punktes a betrachten und die entsprechende Lage von α' suchen. Zu dem Zwecke



bestimmt man auf BL' den Punkt Q durch die Relation $\frac{AO}{BQ} = \lambda$ und zieht die Gerade ϱQ, welche AL in O' trifft. Endlich nehme man zu beiden Seiten des Punktes O die Punkte e, f nach der Relation:

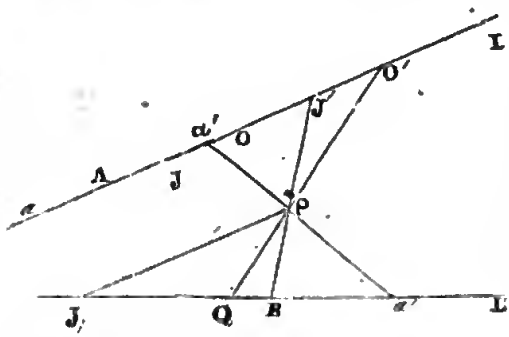
$$Oe = -Of = \sqrt{OO' \cdot OJ},$$

so genügen die beiden Geraden ϱe . ϱf der Aufgabe; d. h. sie treffen die Gerade BL' in zwei Punkten e', f' von solcher Beschaffenheit, daß man hat:

$$\frac{Ae}{Be'} = \lambda \text{ und } \frac{Af}{Bf'} = \lambda.$$

Bei Anwendung der Relation $\frac{Aa}{Ba'} = \lambda$ muß man den auf den beiden Geraden von den beiden festen Punkten A, B aus genommenen Segmenten die gehörigen Zeichen geben, weil sonst dem Punkte a zwei, zu beiden Seiten des Anfangspunktes B liegende Punkte a' entsprechen würden, so daß, wenn der Sinn der positiven Segmente nicht angegeben ist, die Aufgabe statt zwei Auflösungen deren vier gestattet. — Die alten Geometer ersetzten die Anwendung der Zeichen dadurch, daß sie bestimmten, auf welcher Seite die gesuchten Punkte liegen sollen. —

§. 179. Aufgabe vom Raumschnitt. — Wenn zwei Gerade AL, BL' mit zwei festen Punktn A, B gegeben sind, durch einen Punkt ϱ eine Transversale zu ziehen, die auf den beiden gegebenen Geraden zwei Segmente Aa, Ba' bestimmt, deren Produkt einen gegebenen Werth v hat.



Aufl. Wenn man auf den beiden Geraden zwei Punkte a, a' nimmt, welche der Gleichung:

$$Aa \cdot Ba' = v$$

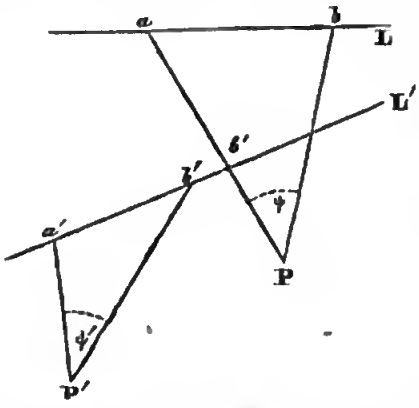
genügen, so bilden dieselben zwei homographische Theilungen (§. 79), und es kommt darauf an, durch den Punkt ϱ eine Gerade zu ziehen, die durch zwei homologe Punkte der beiden Theilungen geht. — Die Gerade $\varrho a'$ trifft AL in α', und die beiden Punkte a, α' bilden zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte zwei Auflösungen der Aufgabe geben. —

Die Gerade ϱB bestimmt auf AL den Punkt J', und um den Punkt J zu bestimmen, zieht man die Gerade ϱJ_1 parallel zu AL, welche auf BL' den Punkt J_1 bestimmt, und den Punkt J bestimmt man durch die Relation $AJ.BJ_1 = v$. Hierauf nimmt man die Mitte O des Segmentes JJ', und auf BL' den durch $AO.BQ = v$ bestimmten Punkt Q; so bestimmt die Gerade ϱQ auf AL den Punkt O'. Endlich nimmt man zu beiden Seiten des Punktes O:

$$Oe = Of = \sqrt{OO'.OJ'},$$

so lösen die beiden Geraden $\varrho e, \varrho f$ die Aufgabe. —

Wenn der Sinn der positiven Segmente nicht vorgeschrieben ist, so gestattet die Aufgabe wieder vier Auflösungen. —



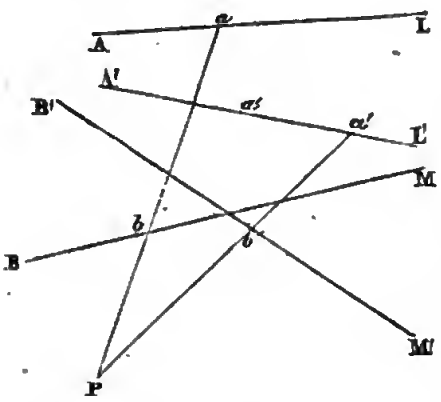
§. 180. Aufgabe. — Wenn auf zwei Geraden L, L' zwei homographische Theilungen gegeben sind, zwei homologe Segmente zu bestimmen, welche von zwei gegebenen Punkten P, P' aus unter gegebenen Winkeln ψ, ψ' erscheinen. —

Aufl. Es seien a, a'; b, b' zwei Paare homologer Punkte der beiden Theilungen, so müssen diese vier Punkte so bestimmt werden, daß die beiden Segmente $ab, a'b'$ von den beiden Punkten P, P' aus unter den Winkeln ψ, ψ' erscheinen. — Nimmt man den Punkt a auf der Geraden L beliebig an, macht den Winkel $aPb = \psi$, Winkel $a'P'b' = \psi'$, und läßt den Punkt a auf der Geraden L fortrücken; so bilden die beiden Punkte b', β' zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte offenbar zwei Auflösungen der Aufgabe geben. —

Da der Winkel $a'P'b' = \psi'$ sowohl auf der linken, wie auf

der rechten Seite von $P'a'$ genommen werden kann, so gibt es offenbar zwei verschiedene Systeme von Auflösungen, also im Ganzen vier Auflösungen, welche sich auf zwei reduciren, wenn der Winkel ψ' ein rechter ist. — Auch kann man den Winkel $aPb = \psi$ sowohl zur Linken, als zur Rechten von Pa nehmen; allein die vier Auflösungen sind in diesem zweiten Falle dieselben, wie im ersten. Denn vertauscht man die Buchstaben der Schenkel jedes der beiden Winkel $aPb, a'P'b'$ in jedrr der vier ersten Auflösungen, d. h. setzt man den Buchstaben a an den Schenkel Pb und den Buchstaben b an den Schenkel Pa, *etc.*; so erhält man die vier neuen Auflösungen, welche mithin dieselben sind, als die vier ersten.

Wenn die Segmente $ab, a'b'$ gegebene Längen haben sollen, o ergibt sich die Auflösung der Aufgabe aus denselben Betrachungen. —



§. 181. Aufgabe. — Wenn auf zwei Geraden $AL, A'L'$ zwei homographische Theilungen, und auf zwei andern Geraden $BM, B'M'$ zwei andere homographische Theilungen gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt P zwei Transversalen zu ziehen, welche die beiden ersten Geraden in zwei homologen Theilungspunkten schneiden, und ebenso die beiden letzten Geraden in zwei homologen Theilungspunkten treffen.

Aufl. Es seien a, a' zwei homologe Punkte der beiden Theilungen auf den beiden Geraden $AL, A'L'$. Man ziehe die Gerade Pa, welche die Gerade BM in b trifft, und b' sei der homologe Punkt auf $B'M'$; so schneidet die Gerade Pb' die Gerade $A'L'$ in einem Punkte a', und die beiden Punkte a', a' bilden offenbar zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen. —

Wenn die beiden Geraden $AL, A'L'$, sowie die beiden Geraden $BM, B'M'$ zusammenfallen; so hat man zwei homographische Theilungen auf derselben Geraden AL und zwei andere homographische Theilungen auf der Geraden BM. —

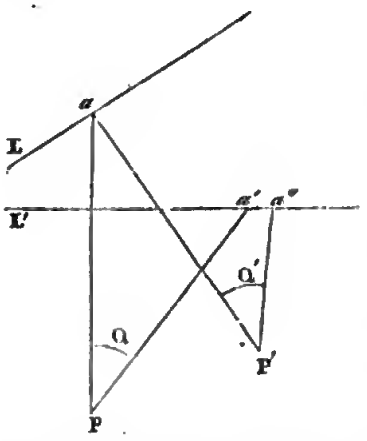
Wenn die beiden Geraden AL, BM weiter in eine zusammenfallen, so hat man zwei Systeme zweier homographischer Theilungen auf derselben Geraden, und die Aufgabe ist alsdann: Zwei Punkte zu bestimmen, welche in den beiden ersten Theilungen und in den beiden letzten zugleich homologe sind. —

Diese Aufgaben lassen sich auf sehr verschiedene Arten anwenden, wovon wir nur ein Beispiel hier anführen wollen:

§. 182. Aufgabe. — Wenn zwei Gerade AL, BM gegeben sind, durch einen Punkt P zwei Transversalen zu ziehen, welche auf den beiden Geraden zwei Segmente von gegebenen Längen λ, μ zwischen sich fassen. —

Auflösung. Wenn man auf der ersten Geraden ein Segment $aa' = \lambda$ nimmt, und dasselbe darauf fortrücken läßt, um ihm verschiedene Lagen zu geben; so bilden die beiden Punkte a, a' zwei homographische Theilungen. Ebenso bestimmt ein Segment $bb' = \mu$ auf der zweiten Geraden zwei homographische Theilungen, so daß die Aufgabe auf die allgemeine hinausläuft. —

Statt der Bedingung: daß die beiden Segmente aa', bb' gegebene Längen haben, kann man fordern: daß sie von zwei festen Punkten aus unter gegebenen Winkeln erscheinen. —



§. 183. Aufgabe. — Wenn zwei Gerade L, L' gegeben sind, zwischen sie eine Gerade aa' zu legen, welche von zwei gegebenen Punkten P, P' aus unter gegebenen Winkeln Q, Q' erscheint. —

Auflösung. Wenn man auf der ersten Geraden L irgend einen Punkt a annimmt, und an den Strahlen Pa $P'a$ die beiden Winkel $aP'a'$ $aP'a''$ bildet, welche resp. den gegebenen Winkeln Q, Q' gleich sind; so treffen die zweiten Schenkel dieser Winkel die Gerade L' in zwei Punkten a', a'', welche, wenn der Punkt a auf L fortrückt, zwei homographische Theilungen bilden, deren Doppelpunkte Auflö-

sungen der Aufgabe sind. — Wenn nicht angegeben ist, in welchem Sinn die Winkel Q, Q' an den Strahlen Pa, Pa' gebildet werden sollen; so gestattet die Aufgabe acht Auflösungen. —

Besondere Fälle. — 1) Wenn einer der gegebenen Winkel $= 0$ gesetzt wird, so ist die Aufgabe: Zwischen zwei gegebene Gerade eine durch einen gegebenen Punkt gehende Gerade zu legen, welche von einem andern Punkte aus unter einem gegebenen Winkel erscheint. —

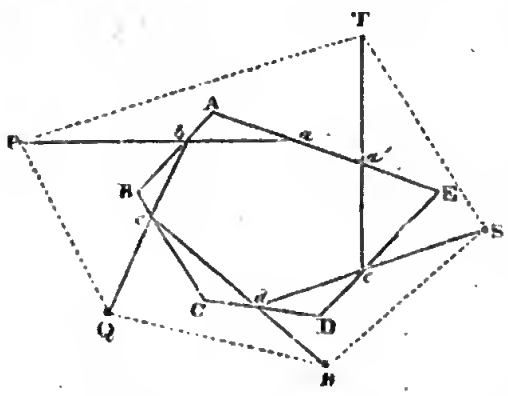
2) Statt der Forderung: daß die Gerade aa' vom Punkte P aus unter dem Winkel Q erscheint, kann man verlangen: daß ihre Projektion auf eine Axe eine gegebene Größe habe. — Und ebenso für den Winkel Q'.

Wenn die beiden Geraden zusammenfallen, so löst man folgende Aufgaben:

3) Auf einen Geraden ein Segment zu bestimmen, welches von zwei gegebenen Punkten aus unter gegebenen Winkeln erscheint.

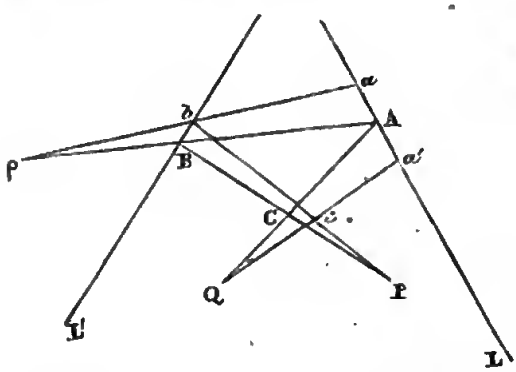
4) Auf einer Geraden ein Segment von gegebener Länge zu bestimmen, welches von einem gegebenen Punkte aus unter einem gegebenen Winkel erscheint.

§. 184. Aufgabe. — Wenn ein Vieleck von n Seiten $ABCDE$ und n beliebige Punkte P, Q, R, S, T, gegeben sind, in dasselbe ein anderes Vieleck von n Seiten zu beschreiben, dessen Seiten durch diese n Punkte gehen. —



Auflösung. Auf der Seite AE nehme man einen beliebigen Punkt a an, ziehe die Gerade aP, welche die Seite AB in b trifft, dann bQ, welche die Seite BC in c trifft, u. s. f.; so erhält man ein Probevieleck $abc\ldots$, dessen letzte Seite Te die Seite AE in einem von a verschiedenen Punkte a' trifft. Diese beiden Punkte a, a' bilden offenbar zwei homographi-

sche Theilungen, deren Doppelpunkte die Spitzen der beiden fraglichen suchten Vielecke sind. —



§. 185. Aufgabe. — Wenn drei Punkte ϱ, P, Q, und zwei Gerade L, L' gegeben sind, ein Dreieck ABC zu construiren, dessen Seiten durch diese drei Punkte gehen, wovon zwei Winkelspitzen A, B resp. auf den Geraden L, L' liegen und dessen Winkel C einem gegebenen Winkel gleich ist. —

Auflösung. Durch den Punkt ϱ ziehe man eine Gerade, welche die beiden Geraden L, L' in a, b treffen mag, hierauf ziehe man Pb und Qa', welche mit Pb den gegebenen Winkel macht; so bilden die beiden Punkte a, a' zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte Auflösungen der Aufgabe sind. —

Ebenso wird folgende Aufgabe gelöst:

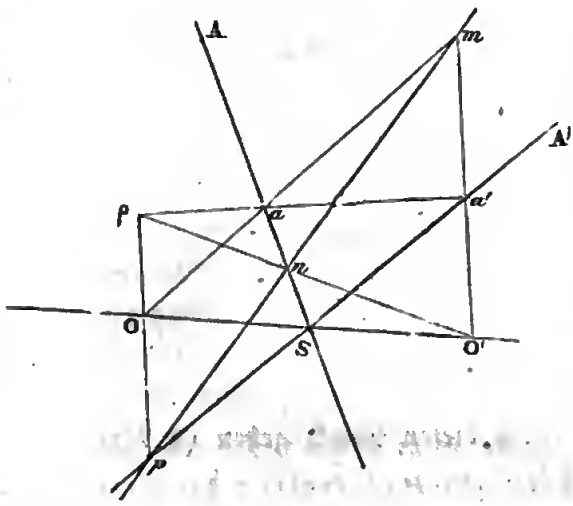
Wenn n beliebige Punkte und $n-1$ beliebige Gerade gegeben sind, ein Vieleck von n Seiten zu construiren, welches so beschaffen ist, daß diese Seiten durch die n Punkte gehen, daß die Ecken, außer einer, auf den $n-1$ Geraden liegen, und daß der Winkel an der letzten Ecke eine gegebene Größe habe.

Anmerkung. Bei den obigen Aufgaben haben wir stets homographische Theilungen angewandt; aber man könnte ebensowohl homographische Büschel nehmen, und die Auflösung würde alsdann von der Bestimmung der Doppelstrahlen zweier Büschel von demselben Mittelpunkte abhängen. —

Lehrsätze über Punkte, welche in gerader Linie liegen und über gerade Linien, welche durch denselben Punkt gehen.

§. 186. Der Satz in §. 69 über zwei homographische Büschel mit zwei zusammenfallenden Strahlen, und der Satz in §. 67 über zwei homographische Theilungen auf zwei Geraden, deren Durchschnittspunkt die Vereinigung zweier homologer Punkte

ist, führen auf verschiedene interessante Sätze, wovon mehrere zwar bekannt und sehr alt sind; aber doch hier erörtert werden sollen, weil sie sich sehr einfach und natürlich aus den allgemeinen Theorien in der ersten Abtheilung ergeben. —

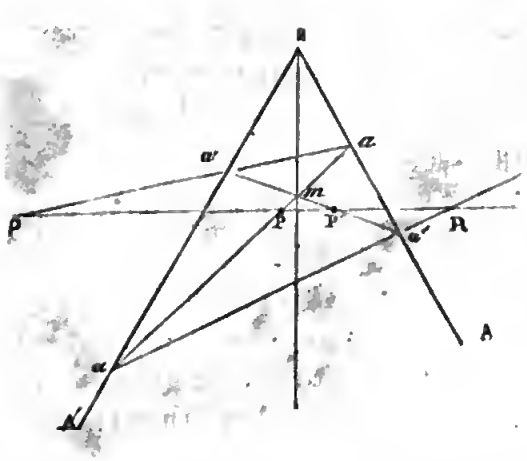


§. 187. Wenn ein Winkel ASA', sowie zwei Punkte O, O' gegeben sind, die mit seiner Spitze S in gerader Linie liegen, und man läßt um einen Punkt ϱ eine Transversale sich drehen, welche die Schenkel dieses Winkels in den Punkten a, a' schneidet; so ist der Ort des Durchschnittspunktes m der beiden Geraden $Oa, O'a'$ eine gerade Linie. —

Denn die Punkte a' a' bilden auf den beiden Geraden SA, SA' zwei homographische Theilungen (§. 66), folglich die Strahlen Oa, $O'a'$ zwei homographische Büschel. Aber der Punkt S ist die Vereinigung zweier homologer Theilungspunkte; folglich haben die beiden Büschel zwei, nach der Geraden OO' zusammenfallende homologe Strahlen, und mithin schneiden sich ihre homologen Strahlen paarweise auf derselben Geraden (§. 69).

Diese Gerade geht durch den Durchschnittspunkt n von SA und $\varrho O'$, sowie durch den Durchschnittspunkt p von SA' und ϱO. Es ist also $\varrho O a S a' O'$ ein zwischen die beiden Geraden $\varrho a a'$ und OSO' beschriebenes Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten sich in den Punkten m, n, p schneiden, welche nach dem vorhergehenden Satze in gerader Linie liegen, so daß man die §. 72 bereits direkt bewiesene Eigenschaft des Sechseckes hier wiederfindet. —

§. 188. Wenn sich eine Transversale um einen festen Punkt ϱ drehet, und zwei feste Gerade A, A' in zwei Punkten a, a' schneidet, und man zieht durch zwei mit ϱ in gerader Li-



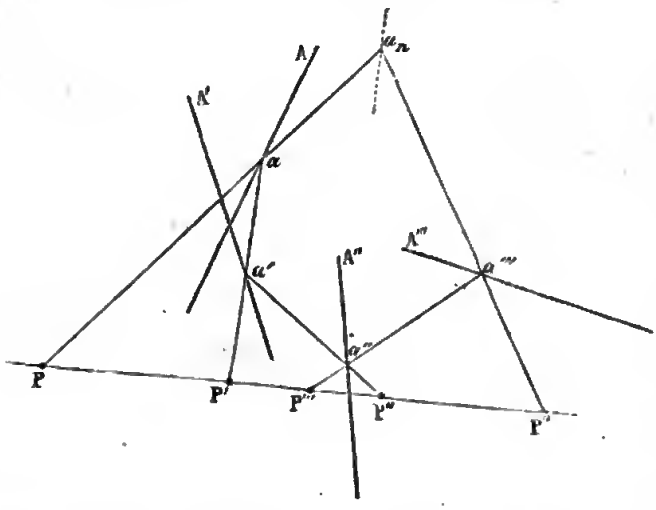
nie liegende Punkte PP, Strahlen nach a, a'; so ist der Ort ihres Durchschnittspunktes m eine durch den Durchschnittspunkt S der beiden festen Geraden A, A' gehende Gerade.

Denn die beiden Punkte a, a' bestimmen auf den beiden festen Geraden zwei homographische Theilungen (§. 66); mithin bilden die beiden Strahlen $Pa, P'a'$ zwei homographische Büschel, welche zwei nach der Geraden PP' zusammenfallende Strahlen haben. Der Ort ihres Durchschnittspunktes m ist folglich eine durch den Durchschnittspunkt S der beiden Geraden A, A' gehende Gerade, weil zwei homologe Strahlen durch diesen Punkt gehen (§. 69).

Die beiden Strahlen $Pa, P'a'$ treffen die beiden Geraden A', A resp. noch in zwei andern Punkten α, α', und die Gerade $\alpha\alpha'$ drehet sich um einen auf der Geraden $\rho PP'$ liegenden Punkt R. — Denn diese beiden Punkte bilden zwei homographische Theilungen, worin der Punkt S zwei zusammenfallende homologe Punkte darstellt (§. 66); folglich gehen die Geraden $\alpha\alpha'$ durch denselben Punkt (§. 67), welcher auf der Geraden $\rho PP'$ liegt, weil diese selbst eine der Lagen von $\alpha\alpha'$ ist. —

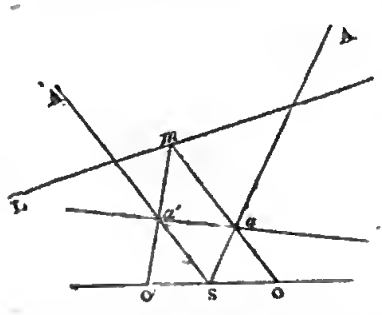
Die sich um die drei festen Punkte ρ, P, P' drehenden Geraden bilden ein Dreieck ama', dessen Ecken a, a' auf den festen Geraden A, A' fortrücken, während die dritte Ecke ebenfalls eine Gerade beschreibt — und in diesem Sinne läßt sich der Satz folgendermaßen auf ein beliebiges Vieleck erstrecken:

Wenn ein Vieleck von n Seiten gegeben ist, welche sich um eben so viele, in gerader Linie liegende feste Pole drehen, und $n-1$ Ecken auf festen Geraden fortgleiten; so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade, und der Durchschnittspunkt irgend zweier, nicht zusammenstoßender Seiten ebenfalls.



Es seien a, $a', a'', \ldots a_n$ die n Spitzen des Vieleckes, dessen n Seiten $a_n a$, $aa', \ldots$ sich um n in gerader Linie liegende feste Pole $P, P', P'', \ldots$ drehen, während die $n-1$ ersten Spitzen auf $n-1$ Geraden $A, A', \ldots$ fortgleiten; so beschreibt die letzte Spitze a_n eine Gerade, und der Durchschnittspunkt irgend zweier, nicht an einanderliegender Seiten, etwa aa' und $a''a'''$, ebenfalls.

Denn zwei aneinanderliegende Seiten, etwa $aa', a'a''$, welche sich um zwei feste Punkte P', P'' drehen, bilden zwei homographische Büschel, weil ihr Durchschnittspunkt auf der Geraden A' fortgleitet, und in diesen beiden Büscheln ist die Gerade $P'P''$ ein gemeinschaftlicher Strahl (§. 68). Ebenso bildet die folgende Seite $a''a'''$ um den Punkt P''' ein Büschel, welches zu dem um den Punkt P'', und mithin zu dem um den Punkt P' homographisch ist; u. s. f., so daß zwei beliebige Seiten, indem sie sich um zwei feste Pole drehen, zwei homographische Büschel bilden, worin die Gerade $PP'P''\ldots$ ein gemeinschaftlicher Strahl ist. Der Durchschnittspunkt die der beiden Seiten beschreibt also eine Gerade; w. b. w. s.



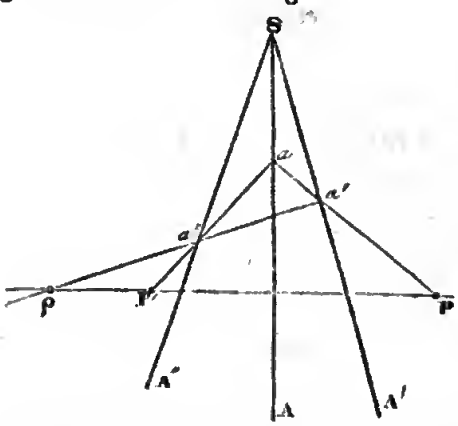
§. 189. Wenn ein Winkel ASA' gegeben ist, und man läßt um zwei mit seinem Scheitel S in gerader Linie liegende Punkte O, O' zwei Strahlen sich drehen, deren Durchschnittspunkt m auf einer festen Geraden L fortrückt; so geht die Gerade, welche die beiden Durchschnittspunkte a, a' dieser Strahlen mit

den Schenkeln des Winkels verbindet, stets durch denselben festen Punkt. —

Denn die beiden Geraden $Om, O'm$ bilden zwei homographische Büschel, wovon zwei homologe Strahlen nach OO' zusammenfallen (§. 68), mithin bestimmen die beiden Punkte a, a' auf den beiden Geraden SA, SA' zwei homographische Theilungen, wovon zwei homologe Punkte in S zusammenfallen, und folglich gehen die Geraden aa' stets durch denselben Punkt (§. 67).

Dieser Satz hätte sich auch aus dem in §. 187, wovon er die Umkehrung ist, ableiten lassen. —

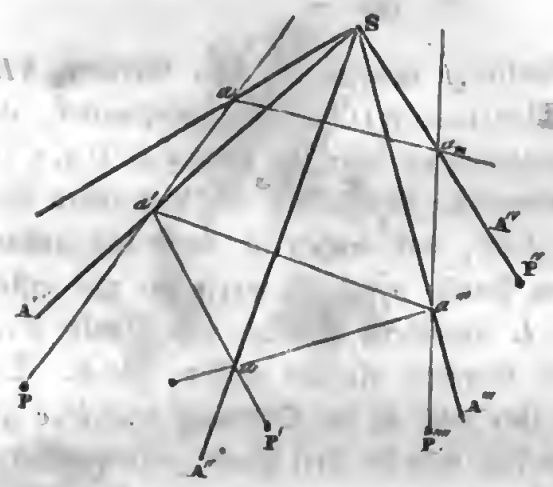
§. 190. Wenn die drei Spitzen eines Dreieckes auf drei festen, durch denselben Punkt gehenden Geraden fortgleiten, während sich zwei seiner Seiten um zwei feste Punkte drehen; so drehet sich die dritte Seite um einen dritten festen Punke, welcher mit den beiden ersten in gerader Linie liegt. —



Es sei $aa'a''$ das Dreieck, dessen drei Spitzen auf den drei Geraden SA, SA', SA'' fortgleiten, während sich die beiden Seiten aa', aa'' um die beiden festen Punkte P, P' drehen; so wird behauptet: daß die dritte Seite $a'a''$ stets durch denselben, auf der Geraden PP' liegenden Punkt ρ geht. — Denn die beiden Geraden $Pa, P'a$ bilden zwei homographische Büschel, weil sie sich auf der Geraden SA schneiden. Die beiden Punkte a', a'', welche sie auf den beiden Geraden SA', SA'' bestimmen, bilden folglich zwei homographische Theilungen, und der Punkt S ist offenbar die Vereinigung zweier homologer Punkte dieser Theilungen. Die Gerade $a'a''$ geht mithin durch einen festen Punkt (§. 67), welcher auf der Geraden PP' liegt, weil diese Gerade eine der Lagen von $a'a''$ ist. —

Dieser Satz kann als der umgekehrte von dem Satze in §. 188 betrachtet, und auf ein Vieleck von einer beliebigen Anzahl von Seiten ausgedehnt werden, so daß man folgenden Satz hat:

Wenn ein Vieleck von n Seiten seine Form ändert, indem die n Ecken desselben auf n durch denselben Punkt gehenden Geraden fortgleiten, während sich $n-1$ seiner Seiten um $n-1$ beliebige feste Punkte drehen; so drehet sich die $n$te Seite des Vieleckes, so wie jede seiner Diagonalen auch um einen festen Punkt. —



Es sei $aa'a''a'''\ldots$ das Vieleck, dessen Spitzen $a, a', a'', \ldots$ auf den Geraden $A, A', A'', \ldots$, welche alle durch denselben Punkt S gehen, fortgleiten, während $n-1$ Seiten aa', $a'a''$, $a''a'''$,.. desselben sich um willkürliche Punkte $P, P', P'', \ldots$ drehen; so wird behauptet: daß die letzte Seite aa_n stets durch einen und denselben Punkt geht, und daß dasselbe mit jeder der Diagonalen $a'a'''$,... der Fall ist. —

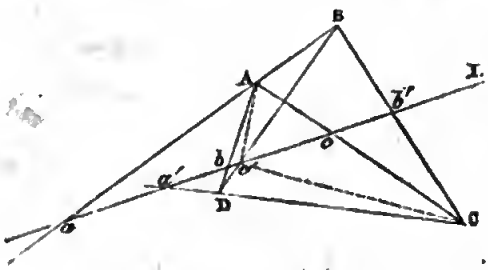
Denn zwei aufeinanderfolgende Ecken a', a'' bilden auf den beiden Geraden SA', SA'' zwei homographische Theilungen, wovon S ein gemeinschaftlicher Punkt ist, weil sich die Seite $a'a''$ um einen Punkt P' drehet (§. 66). Ebenso bestimmt die folgende Ecke a''' auf der Geraden SA''' eine Theilung, welche mit der auf A'' homographisch ist, also auch mit der auf A, u. s. f. Zwei beliebige Spitzen des Vieleckes bilden mithin auf den beiden Geraden, welche sie durchlaufen zwei homographische Theilungen, für welche der Durchschnittspunkt S ein gemeinschaftlicher Punkt ist, und folglich drehet sich die Gerade, welche diese beiden Spitzen verbindet, um einen festen Punkt, wodurch der Satz bewiesen ist. —

Eigenschaften des Viereckes.

§. 191. Jede Transversale in der Ebene eines Viereckes trifft die vier Seiten und die beiden Diagonalen desselben in sechs Punkten, welche eine Involution bilden. —

Es sei $ABCD$ das Viereck und L eine Transversale, welche

die Gegenseiten AB, CD in $a. a'$, die Gegenseiten AD, BC in b, b' und die Diagonalen AC, BD in c, c' trifft; so wird behauptet: daß die drei Paare conjugirter Punkte a, a'; b, b'; c, c' eine Involution bilden. —



Denn die von dem Punkte A ausgehenden vier Geraden AB, AC, AD, Ac' treffen die Diagonale BD in denselben Punkten, als die von dem Punkte C ausgehenden vier Geraden CB, CA, CD, Cc'; folglich ist das anharmonische Verhältniß der vier ersten Geraden dem der vier letzten gleich, und mithin ist auch das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, c, b, c', worin die vier ersten Geraden die Transversale L schneiden, dem der vier Punkte b', c, a', c', worin die vier letzten Geraden dieselbe treffen, gleich. Die vier letzten Punkte können aber auch in der Ordnung a', c', b', c genommen werden (§. 26), so daß man die drei Paare correspondirender Punkte a, a'; b, b'; c, c' hat, und das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, c' dem der vier entsprechenden Punkte a', b', c', c gleich ist; woraus folgt: daß die drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' eine Involution bilden (§. 116).

§. 192. Construction des sechsten Punktes einer Involution. — Nach dem vorhergehenden Satze kann man den sechsten Punkt, welcher mit fünf gegebenen Punkten eine Involution bildet, mittelst des Durchschnittes von bloßen geraden Linien finden. — Denn es seien b, b'; c, c' zwei Paare conjugirter Punkte und a der fünfte Punkt, dessen conjugirter a' gefunden werden soll. Durch den Punkt a ziehe man eine beliebige Gerade, worauf man zwei willkürliche Punkte A, B annimmt; so schneiden die Geraden Ab, Ac die Geraden Bc', Bb' resp. in zwei Punkten D, C, und die Gerade CD bestimmt den Punkt a'. —

§. 193. In jedem Viereck theilen die beiden Diagonalen die Gerade, welche die Durchschnittspunkte zweier Gegenseiten verbindet, harmonisch. —

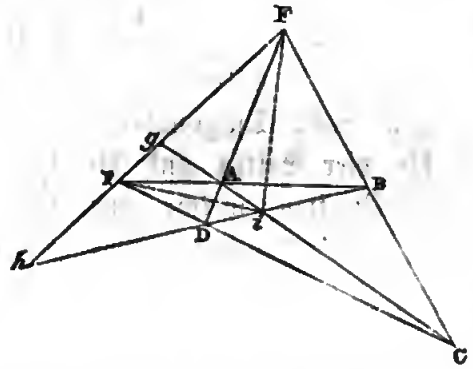
Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden; denn man braucht zu der Transversale L nur die Verbindungslinie der

Durchschnittspunkte der Gegenseiten zu nehmen. Jeder dieser beiden Punkte ist ein Doppelpunkt der Involution, und sie theilen folglich das zwischen den beiden Diagonalen liegende Segment harmonisch. — Uebrigens ist auch der Beweis des allgemeinen Satzes in §. 191 auf den vorliegenden besonderen Fall anwendbar. —

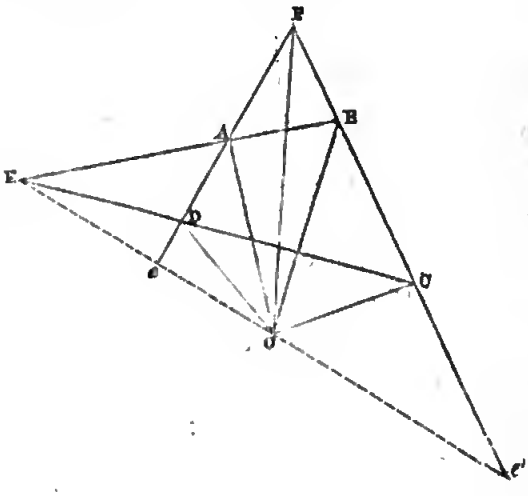
Man kann auch sagen: Daß eine Diagonale durch die andere und durch die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten harmonisch getheilt wird. —

§. 194. Construction des vierten Punktes einer harmonischen Proportion. —

Nach dem vorhergehenden Satze kann man mittelst des Durchschnittes von bloßen geraden Linien den vierten Punkt einer harmonischen Proportion bestimmen. Denn es seien E, F, h die drei gegebenen Punkte und g der gesuchte harmonisch conjugirte Punkt von h in Bezug auf E, F. Man ziehe durch die Punkte E, F zwei beliebige Gerade EC, FC, durch den Punkt h eine Transversale,



welche diese beiden Geraden in D, B trifft, dann die beiden Diagonalen FD, EB, welche sich in A schneiden, und endlich die Gerade CA, welche den Punkt g bestimmt. —



§. 195. Die von demselben Punkte nach den vier Spitzen eines Viereckes und nach den Durchschnittspunkten seiner Gegenseiten gezogenen sechs Geraden bilden ein Involutionsbüschel. —

Es sei $ABCD$ das Viereck, E, F die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und O der Punkt, von welchem aus die sechs Geraden $OA, OB,$

etc. gezogen werden. Die Gerade OE trifft die beiden Gegenseiten AD, BC in zwei Punkten e, e', so daß man auf diesen Seiten zwei Reihen von vier Punkten A, D, e, F und B, C, e', F hat, deren anharmonische Verhältnisse gleich sind, weil die drei Geraden AB, DC, ee' durch denselben Punkt E gehen. Mithin ist das anharmonische Verhältniß der vier Geraden OA, OD, OE, OF dem der vier Geraden OB, OC, OE, OF gleich. Nun kann man aber letztere auch in der Folge OC, OB, OF, OE nehmen (§. 26), so daß man die drei Paare conjugirter Strahlen OA, OC; OD, OB; OE, OF hat, welche so beschaffen sind, daß das anharmonische Verältniß von vier dieser Geraden dem der vier conjugirten Geraden gleich ist. Folglich bilden diese sechs Geraden oder Strahlen ein Involutionsbüschel (§. 150).

Oder: Der Satz läßt sich auch direkt aus dem in §. 191 herleiten, und umgekehrt. — Denn die beiden Geraden OA, OB bestimmen ein Viereck $OAFB$, dessen beide Diagonalen OF, AB sind. Die Gerade DC schneidet die vier Seiten und die beiden Diagonalen dieses Viereckes in sechs Punkten, welche eine Involution bilden (§. 191), und folglich bilden die durch diese Punkte gehenden sechs Strahlen OA, OC; OB, OD; OE, OF ein Involutionsbüschel. —

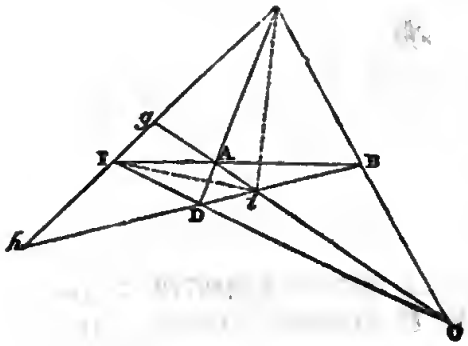
Wenn der Punkt O in unendlicher Entfernung angenommen wird, so werden die nach den vier Spitzen des Viereckes und nach den Durchschnittspunkten seiner Gegenseiten gezogenen Geraden parallel; aber sie treffen dieselbe Gerade immer in sechs Punkten, welche eine Involution bilden. Man hat also den Satz: Die Projektionen der vier Spitzen und der beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes auf eine Gerade bilden eine Involution. —

Wenn O einer der Durchschnittspunkte der über den beiden Diagonalen des Viereckes als Durchmesser beschriebenen Kreise ist, so sind die von O nach jedem Paare von Gegenecken gezogenen Geraden auf einander senkrecht (§. 152), und folglich geht der über der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten als Durchmesser beschriebene Kreis auch durch die Durchschnittspunkte der beiden andern Kreise. Man hat also den Satz:

Die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen und die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der

Gegenseiten eines Viereckes sind, durchschneiden sich in denselben beiden Punkten. — Folglich liegen die Mittelpunkte der beiden Diagonalen und der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes in gerader Linie. —

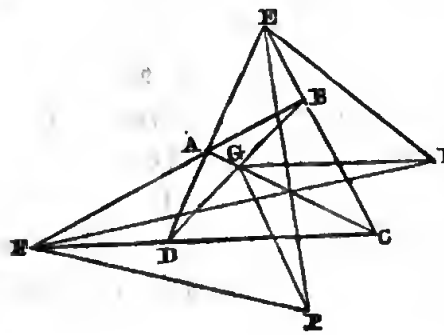
§. 196. In jedem Viereck bilden die beiden Diagonalen und die von ihrem Durchschnittspunkte nach den Durchschnittspunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden ein harmonisches Strahlenbüschel. —



Dieser Satz folgt als besonderer Fall aus dem in §. 195, und läßt sich ebenso direkt beweisen. Derselbe ergiebt sich auch aus §. 193; denn da die beiden Punkte g, h das Segment EF harmonisch theilen, so sind die beiden Geraden ig, ih in Bezug auf iE, iF harmonisch conjugirt. —

§. 197. Wenn in der Ebene eines Viereckes ein beliebiger Punkt P angenommen wird, so sind die Polaren dieses Punktes in Beziehung auf die drei Winkel, wovon der eine von zwei Gegenseiten des Viereckes, der andere von den beiden andern Gegenseiten und der dritte von den beiden Diagonalen gebildet wird, so beschaffen, daß sie durch denselben Punkt P' gehen. —

Unter der Polare eines Punktes P in Bezug auf einen Winkel verstehen wir die Gerade, welche in Beziehung auf die beiden Schenkel dieses Winkels die harmonisch conjugirte von der Geraden ist, die den Punkt P mit dem Scheitel des Winkels verbindet. (§. 52).



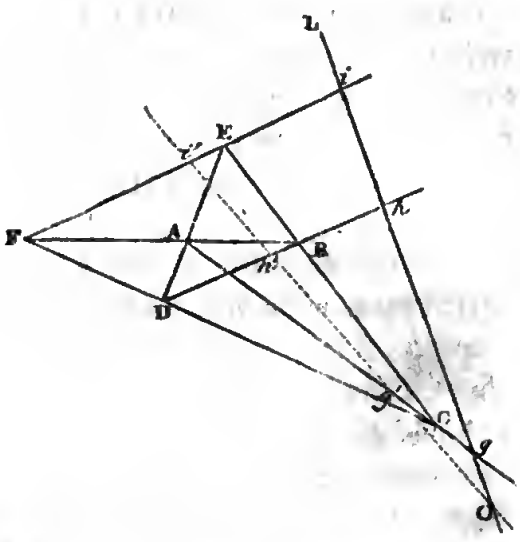
Es sei $ABCD$ das Vireck und P' der Punkt, wo sich die Polaren des Punktes P in Bezug auf die von den beiden Paaren von Gegenseiten gebildeten

Winkel AEB, AFD treffen; so wird behauptet: daß die Polare des Punktes P in Beziehung auf den von den beiden Diagonalen gebildeten Winkel DGC durch denselben Punkt P' geht. — Denn die Gerade PP' trifft die vier Seiten und die beiden Diagonalen des Viereckes in sechs Involutionspunkten (§. 191). Nun sind aber die beiden Punkte P, P' harmonisch conjugirt in Bezug auf zwei Punkte der beiden ersten Gegenseiten und auch in Beziehung auf zwei Punkte der beiden andern, weil P' zugleich auf den beiden ersten Polaren liegt. Folglich sind P, P' die Doppelpunkte der Involution (§. 127), theilen also das auf der Transversale zwischen den beiden Diagonalen liegende Segment harmonisch, und mithin ist P' ein Punkt der Polare des Punktes P in Beziehung auf den von den beiden Diagonalen gebildeten Winkel. —

Wenn der Punkt P in unendlicher Entfernung liegt, so geht seine Polare in Beziehung auf zwei Gegenseiten des Viereckes durch die Mitte des zwischen diesen beiden Seiten liegenden Segmentes einer beliebigen durch den Punkt P gehenden Geraden (§. 52). Hieraus ergibt sich der Satz:

Wenn man in der Ebene eines Viereckes zieht: 1) eine beliebige Transversale, 2) eine Gerade von dem Durchschnittspunkte zweier Gegenseiten nach der Mitte des zwischen ihnen liegenden Segmentes der Transversale, 3) eine Gerade von dem Durchschnittspunkte der beiden andern Gegenseiten nach der Mitte des zwischen diesen liegenden Segmentes der Transversale und 4) eine Gerade von dem Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen nach der Mitte des zwischen ihnen liegenden Segmentes der Transversale; so gehen diese drei Geraden durch denselben Punkt. —

§. 198. Wenn ein Viereck gegeben ist, und man zieht eine Transversale, welche die beiden Diagonalen und die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten durchschneidet, und man nimmt auf diesen drei letzten Geraden die drei Punkte, welche sie resp. mit der Transversale harmonisch theilen; so liegen diese drei Punkte in gerader Linie. —



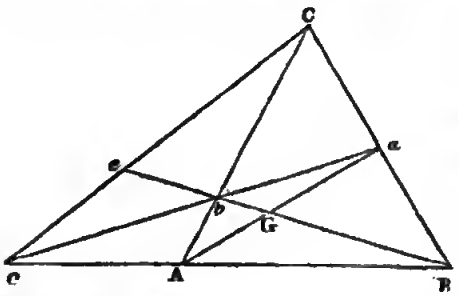
Es seien g, h, i die drei Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen AC, BD und der Verbindungslinie EF mit der Transversale L, und g', h', i' die harmonisch conjugirten dieser Punkte auf den Geraden AC, BD, EF; so wird behauptet: daß die drei Punkte g', h', i' in gerader Linie liegen. — Denn es sei O der Durchschnittspunkt der Geraden $g'h'$ mit der Transversale L, so sind die von O nach den vier Spitzen und nach den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten des Viereckes gezogenen sechs Geraden in Involution. (§. 195). Nun sind aber die beiden Geraden Og, Og' in Bezug auf OA, OC harmonisch conjugirt, weil die Punkte g, g' die Diagonale AC harmonisch theilen, und aus einem ähnlichen Grunde sind Og, Og' auch in Beziehung auf OB, OD harmonisch conjugirt; folglich sind sie es auch in Bezug auf die beiden andern Geraden OE, OF der Involution (§. 150). Die erste geht aber durch den Punkt i, und mithin geht die zweite durch den Punkt i', wodurch der Satz bewiesen ist. —

Wenn die Gerade L in unendlicher Entfernung liegt, so sind die Punkte g', h', i die Mitten der Geraden AC, BD, EF. In jedem Viereck sind also die Mitten der beiden Diagonalen und der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten drei in gerader Linie liegende Punkte. (Vergl. §. 195).

§. 199. In einem Viereck kann man die beiden Paare gegenüberliegender Spitzen und die beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten als drei Paare conjugirter Punkte betrachten, welche eine Involution bilden. — Es finden zwischen diesen sechs Punkten die Involutionsgleichungen mit sechs und achtSegmenten, sowie mehrere der dreigliedrigen Gleichungen statt. — Und wenn man

in der Ebene des Viereckes eine, oder zwei beliebige feste Gerade zieht, so finden zwischen den Entfernungen der erwähnten sechs Punkte des Viereckes von diesen Geraden ähnliche Relationen statt, wie die zwischen sechs Involutionspunkten und einem, oder zwei willkürlichen Punkten. —

Diese verschiedenen Eigenschaften des Viereckes ergeben sich unmittelbar aus den Involutionsgleichungen, wenn man blos beachtet: daß die Projektion der Spitzen und der Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Viereckes auf eine Gerade sechs Involutionspunkte gibt (§. 195). Denn jede der Involutionsgleichungen besteht im Allgemeinen aus Verhältnissen zweier Segmente, und in den meisten entsprechen die beiden Segmente jedes Verhältnisses zwei in gerader Linie liegenden Segmenten in dem Vierecke, so daß das Verhältniß zweier Segmente in der Projektion dem der beiden entsprechenden Segmente in dem Viereck gleich ist, und mithin die Relation von sechs Involutionspunkten auch auf die sechs genannten Punkte des Viereckes anwendbar ist. —



Es sei $ABab$ das Viereck und C,c seien die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten, so hat man für die sechs Punkte A,a; B,b; C,c; die folgenden Relationen, welche eben so viele Lehrsätze über die Eigenschaften des Viereckes ausdrücken:

I. $$\frac{AB.Ab}{AC.Ac} = \frac{aB.ab}{aC.ac},$$ (§. 117. Gl. (a)).

II. $$Ab.Bc.Ca = -aB.bC.cA,$$ (Gl. (b))

oder:

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = +1.$$

III. $$AB = AC.\frac{Bc}{ac} - BC.\frac{Ac}{bc},$$ (§. 141).

IV. $$AB = \frac{AC.Ac}{Ab} - \frac{BC.Bc}{Ba}.$$

V. $$\frac{BA}{Ac}+\frac{Ba}{aC}=\frac{Ab}{bc}\,.$$

Dieſe letzte Gleichung ergibt ſich aus der Gleichung:

$$(\mu')\qquad \frac{bb'}{b'e}=\frac{ba}{ae}+\frac{ba'}{a'e}$$

zwiſchen vier Punkten a,a'; b,b' und einem Doppelpunkte e, welche ſich ihrerſeits aus der Gleichung (μ) in §. 141ª ergibt, wenn man annimmt, daß die beiden Punkte c,c' in einem Doppelpunkte e zuſammenfallen. — Um die Gleichung (μ') auf das Viereck anzuwenden, braucht man die Projektion nur durch Parallelen zu Cc zu machen, ſo daß man in der Projektion einen Doppelpunkt erhält. —

VI. $$\frac{BA}{Ac}+\frac{Ba}{aC}+\frac{Bb}{bG}=-2,$$

oder:

$$\frac{Bc}{Ac}+\frac{BC}{aC}+\frac{BG}{bG}=+1.$$

Die erſte dieſer beiden Gleichungen ergibt ſich aus der vorhergehenden, wenn man bemerkt: daß die Diagonale Bb in G und e harmoniſch getheilt wird (§. 193), ſo daß man hat:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{bB}&=\frac{1}{be}+\frac{1}{bG}\\ \text{oder:}\qquad \frac{Bb}{be}+\frac{Bb}{bG}&=-2\end{aligned}\right\}\ (\text{§. 37})$$

und die zweite Gleichung ergibt ſich unmittelbar aus der erſten. —

Bezeichnet man die Abſtände der vier Spitzen des Vierecks und der beiden Durchſchnittspunkte ſeiner Gegenſeiten von einer feſten Geraden M reſp. mit (A,M), (a,M), ... und die Mitten der beiden Diagonalen Aa, Ab und der Verbindungslinie Cc reſp, mit α,β,γ; ſo hat man die Relation:

VII. $$(A,M)\,(a,M).\beta\gamma+(B,M)\,(b.M).\gamma\alpha+(C,M)\,(c.M).\alpha\beta=0.$$

Denn wenn man die Figur auf eine auf der Transverſale M ſenkrechte Gerade projicirt, ſo bleiben die Abſtände oder Perpendikel (A,M), ... in der Projektion dieſelben Größen, und die Seg-

mente $\mathfrak{E}\gamma, \gamma\alpha, \alpha\mathfrak{E}$ sind ihren Projektionen proportional, weil die drei Punkte $\alpha, \mathfrak{E}, \gamma$ in gerader Linie liegen (§. 198). Man erhält also die Involutionsgleichung (1) in §. 134 wieder, worin ein willkürlicher Punkt vorkommt, und folglich ergibt sich aus dieser Gleichung der in Rede stehende Satz. —

Wenn die Gerade M durch die Spitze A geht, so ist das Verhältniß der Abstände der beiden Punkte B, c von dieser Geraden $= \frac{AB}{Ac}$, und ebenso ist das Verhältniß der Abstände der beiden Punkte b, C von derselben Geraden $= \frac{Ab}{AC}$, so daß sich die Gleichung auf folgende reducirt:

VIII. $$\frac{AB \cdot Ab}{AC \cdot Ac} = \frac{\alpha\mathfrak{E}}{\alpha\gamma} .$$

Wenn N eine feste Gerade und $\alpha_1\, \mathfrak{E}_1\, \gamma_1$ die drei Punkte bedeuten, welche mit dieser Geraden resp. die beiden Diagonalen Aa, Bb und die Gerade Cc harmonisch theilen, und n ist der Durchschnittspunkt der Geraden $\alpha_1\, \mathfrak{E}_1\, \gamma_1$ mit N; so hat man die Relation:

IX. $$\frac{\mathfrak{E}_1\, \gamma_1 \cdot n\alpha_1}{(A,N) \cdot (a,N)} + \frac{\gamma_1 \alpha_1 \cdot n\mathfrak{E}_1}{(B,N) \cdot (b,N)} + \frac{\alpha_1 \mathfrak{E}_1 \cdot n\gamma_1}{(C,N) \cdot (cN)} = 0.$$

Diese Gleichung ergibt sich aus der Gleichung (α) in §. 142 ganz ebenso, wie die vorhergehende aus der Gleichung (1) in §. 134.

Die beiden letzten Sätze können als besondere Fälle desselben allgemeinen Satzes angesehen werden, worin die Abstände der Spitzen und Durchschnittspunkte des Viereckes von zwei beliebigen festen Geraden M, N betrachtet werden. Man hat nämlich die Relation:

X. $$\frac{(A,M) \cdot (a,M)}{(A,N) \cdot (a,N)} \mathfrak{E}_1\, \gamma_1 \cdot n\alpha_1 + \frac{(B,M)\,(b,M)}{(B,N)\,(b,N)} \cdot \alpha_1\, \gamma_1\, n\mathfrak{C}$$

$$+ \frac{(C,M) \cdot (c,M)}{(C,N) \cdot (c,N)} \alpha_1\, \mathfrak{E}_1 \cdot n\gamma = 0,$$

welche sich ganz einfach aus §. 151 ergibt. —

Wenn $\alpha, \mathfrak{E}, \gamma$ resp. die Mitten von Aa, Bb, Cc sind, so hat man die Relation:

XI. $$(\alpha a)^2 \cdot \mathfrak{E}\gamma + (\mathfrak{E}b)^2 \cdot \gamma c + (\gamma c)^2 \cdot \alpha\mathfrak{E} = 0,$$

Denn wenn man die Figur orthogonal auf eine Gerade X projicirt, so erhält man sechs Punkte, welche eine Involution bilden (§. 195), woraus nach §. 140 folgt:

XII. $$(\alpha a)^2 \cos^2(\alpha a, X)\, \mathfrak{E}\gamma + (\mathfrak{E} b)^2 \cos^2(\mathfrak{E} b, X)\, \gamma\alpha + (\gamma c)^2 \cos^2(\gamma c, X)\, \alpha\mathfrak{E} + \alpha\mathfrak{E}.\mathfrak{E}\gamma.\gamma\alpha \cos^2(\alpha\mathfrak{E}, X) = 0.$$

Für eine andere Gerade X' hat man eine ähnliche Relation, und wenn man annimmt: daß die beiden Geraden X, X' auf einander senkrecht sind; so ergibt sich durch Addition beider Gleichungen die zu beweisende. —

Wenn eine Transversale N die drei Geraden Aa, Bb, Cc in den Punkten v, v', v'' trifft, so hat man die Relation:

XIII. $$\frac{(a_1 a)^2}{(v,a)^2}\cdot\frac{\mathfrak{E}_1\gamma_1}{n a_1} + \frac{(\mathfrak{E}_1 b)^2}{(v' b)^2}\cdot\frac{\gamma_1 a_1}{n\mathfrak{E}_1} + \frac{(\gamma, c)^2}{(v'' c)^2}\cdot\frac{a_1\mathfrak{E}_1}{n\gamma_1} + \frac{a_1\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_1\gamma_1 \cdot \gamma_1 a_1}{n a_1 \cdot n\mathfrak{E}_1 \cdot n\gamma_1} = 0,$$

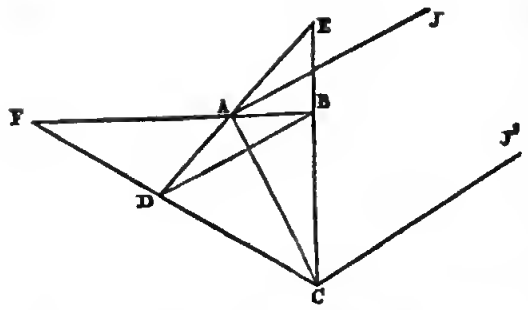
worin $a_1, \mathfrak{E}_1, \gamma_1$ und n dieselbe Bedeutung wie in IX haben. —

Denn wenn man die Figur auf eine auf N senkrechte Gerade projicirt, so geht diese Relation in eine Involutionsgleichung für sechs Punkte über (§. 140).

§. 200. Für die Winkel, welche die Gegenseiten und die Diagonalen eines Viereckes mit einander bilden, finden alle Involutionsgleichungen eines sechsstrahligen Büschels statt. —

Denn denkt man sich eine beliebige Transversale gezogen, so schneidet dieselbe die Seiten und Diagonalen des Viereckes in sechs Punkten, welche eine Involution bilden (§. 191). Die von demselben Punkte nach diesen sechs Punkten gezogenen Geraden bilden ein Involutionsbüschel, und wenn sich die Transversale ins Unendliche entfernt; so werden die sechs Geraden zu den Seiten und Diagonalen des Viereckes parallel. Folglich ꝛc.

Man kann diesen Satz auch direkt beweisen. — Denn zieht



man durch die gegenüberliegenden Spitzen A, C Parallelen zu der Diagonale DB, so sind A, C die Mittelpunkte zweier vierstrahliger Büschel, welche daſſelbe anharmoniſche Verhältniß haben, weil die vier Strahlen AD, AB, AC, AJ des erſten Büſchels die vier Strahlen CD, CB, CA, CJ' des zweiten in vier in gerader Linie liegenden Punkten treffen. Es iſt alſo auch das anharmoniſche Verhältniß der vier Strahlen AD, AB, AC, CJ dem der vier Strahlen CB, CD, CJ', CA gleich. Nun fallen aber AC, CA zuſammen, und AJ, AJ' ſind parallel, ſo daß beide Syſteme, was die Richtung betrifft, nur ſechs paarweiſe conjugirte Grade enthalten, für welche wegen der Gleichheit der anharmoniſchen Verhältniſſe folglich auch alle Involutionsgleichungen ſtattfinden (§. 150). W. b. w. ſ.

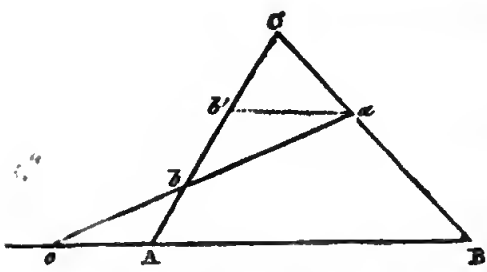
Hieraus folgt nach §. 152:

Wenn zwei Gegenſeiten, ſo wie die beiden Diagonalen eines Viereckes auf einander ſenkrecht ſind, ſo ſind die beiden andern Gegenſeiten auch auf einander ſenkrecht. —

Dieſer Satz läuft, wie man leicht einſieht, auf folgenden hinaus:

Die aus den Winkelſpitzen eines Dreieckes auf die Gegenſeiten gefällten Perpendikel gehen durch denſelben Punkt. —

Eigenſchaften des Dreieckes.



§. 201. Ein Dreieck ABC, deſſen Seiten von einer Transverſale in drei Punkten a, b, c geſchnitten werden, kann man als ein Viereck $ABab$ betrachten, deſſen Gegenſeiten ſich reſp. in den Punkten C, c ſchneiden; und mithin ſind die verſchiedenen Sätze über das Viereck, namentlich die, worin die drei Punktepaare A, a; B, b; C, c eine Involo-

lution bilden, auch auf das Dreieck anwendbar. — Wir wollen jedoch von diesen Sätzen nur den in der Gleichung II. in §. 199 liegenden hier nochmals betrachten und folgendermaßen ausdrücken:

Wenn ein Dreieck ABC von einer Transversale abc durchschnitten wird, so findet zwischen den auf den Seiten desselben gebildeten Abschnitten folgende Relation statt:

$$(1) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

Der in dieser Gleichung liegende Lehrsatz ergibt sich unmittelbar aus dem leicht zu beweisenden Satze: daß die Projektionen der Spitzen des Dreieckes und der Punkte a, b, c auf dieselbe Gerade sechs Involutionspunkte bilden (§. 199); allein man kann den in Rede stehenden Lehrsatz auch auf mehrere Arten ganz einfach direkt beweisen. Denn zieht man ab' parallel zu AB und betrachtet die von dem Punkte a ausgehenden vier Geraden, welche von den Seiten AC, AB durchschnitten werden; so hat man nach §. 13:

$$\frac{bC}{bA} : \frac{b'C}{b'A} = \frac{cB}{cA},$$

und $\frac{b'C}{b'A} = \frac{aC}{aB}$, weil ab' zu AB parallel ist. Folglich:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

Oder: Die Dreiecke Abc, Bca, Cab geben:

$$\frac{Ab}{Ac} = \frac{\sin c}{\sin b}, \quad \frac{Bc}{Ba} = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \frac{Ca}{Cb} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

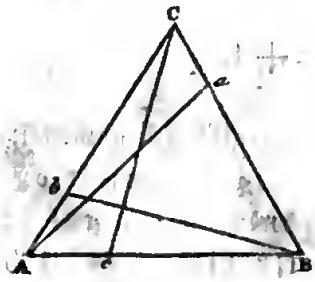
und wenn man diese drei Gleichheiten in einander multiplicirt; so kommt:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

Daß der zweite Theil dieser Gleichheit $= +1$ sein muß, ergibt sich nach unserer allgemeinen Zeicheregel. Denn von den drei Punkten a, b, c liegen entweder zwei auf zwei Seiten des Drieckes

und der dritte auf der Verlängerung der dritten Seite, oder sie liegen alle drei auf den Verlängerungen der drei Seiten. Im ersten Falle sind aber zwei Verhältnisse negativ und das dritte ist positiv, und im zweiten Falle sind alle drei Verhältnisse positiv, mithin ist ihr Produkt immer positiv. —

§. 202. Wenn man aus den Winkelspitzen eines Dreieckes ABC drei beliebige Gerade zieht, welche die Gegenseiten in den Punkten a, b, c schneiden; so hat man sowohl in Bezug auf den absoluten Werth, als auf das Zeichen die Relation:



$$(\alpha)\quad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=\frac{\sin a\,AB}{\sin a\,AC}\cdot\frac{\sin b\,BC}{\sin b\,BA}\cdot\frac{\sin c\,CA}{\sin c\,CB}$$

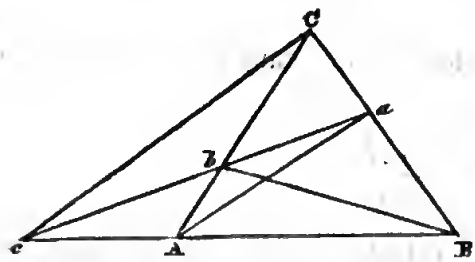
Denn man hat die drei Gleichheiten:

$$\frac{aB}{aC}=\frac{\sin a\,AB}{\sin a\,AC}\cdot\frac{AB}{AC},\quad \frac{bC}{bA}=\frac{\sin b\,BC}{\sin b\,BA}\cdot\frac{BC}{BA},$$

$$\frac{cA}{cB}=\frac{\sin c\,CA}{\sin c\,CB}\cdot\frac{CA}{CB},$$

und wenn man diese in einander multiplicirt; so erhält man die Relation (α), welche offenbar auch hinsichtlich des Zeichens gilt, weil jedes Verhältniß im ersten Theile dasselbe Zeichen hat, als das entsprechende Verhältniß im zweiten Theile. —

§. 203. Wenn man durch die Spitzen eines Dreieckes ABC drei Gerade zieht, welche die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c treffen; so findet zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese Geraden mit den Schenkeln der Winkeln, von deren Spitze sie ausgehen, folgende Relation statt:



$$(2) \qquad \frac{\sin a\,AB}{\sin a\,AC} \cdot \frac{\sin b\,BC}{\sin b\,BA} \cdot \frac{\sin c\,CA}{\sin c\,CB} = +1.$$

Dieſes erhellet unmittelbar aus der Vergleichung der Relationen (1) und (α).

Die Umkehrungen der Lehrſätze in §. 201 und §. 203 finden ebenfalls ſtatt; d. h. wenn man auf den drei Seiten eines Dreieckes ABC drei Punkte a, b, c ſo nimmt, daß die Gleichung (1) oder (2) ſtattfindet; ſo liegen dieſe drei Punkte in gerader Linie. —

Denn es ſei c' der Punkt, worin die Gerade ab die Seite AB trifft, ſo iſt nach §. 201:

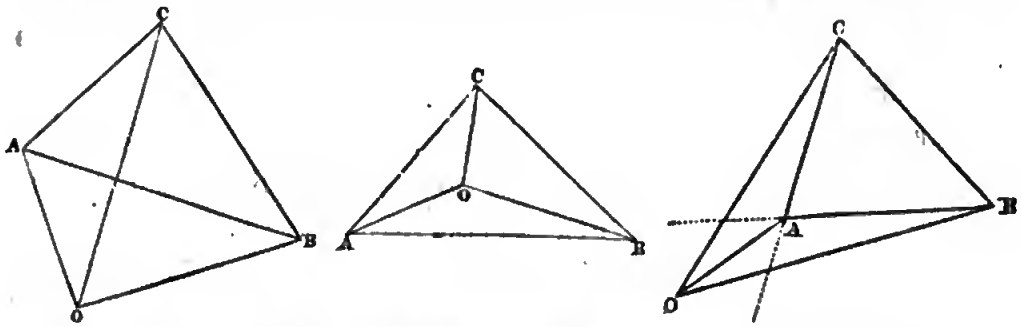
$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = +1,$$

und da nach der Vorausſetzung die Gleichung (1) ſtattfindet; ſo folgt:

$$\frac{c'A}{c'B} = \frac{cA}{cB}.$$

Der Punkt c' fällt alſo mit dem Punkte c zuſammen, und ebenſo wird der Beweis in Bezug auf die Gleichung (2) geführt. —

§. 204. Wenn man von einem Punkte O nach den Winkelſpitzen eines Dreieckes ABC gerade Linien zieht, ſo bilden dieſelben



mit den Seiten des Dreieckes die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Viereckes $OACB$, und es finden folglich zwiſchen dieſen Geraden und den Seiten des Dreieckes alle Winkelrelationen ſtatt, welche in einem ſechsſtrahligen Involutionsbüſchel ſtattfinden (§. 200). Hieraus ergeben ſich verſchiedene Eigenſchaften des Dreieckes, wovon wir hier nur die folgende anführen wollen:

Wenn drei von den Spitzen eines Dreieckes ABC ausgehende Gerade durch denselben Punkt O gehen, so hat man zwischen den Sinussen der Winkel, welche jede mit den Schenkeln des Winkels bildet, wovon sie ausgeht, die Relation:

$$(3) \qquad \frac{\sin OAB}{\sin OAC} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OBA} \cdot \frac{\sin OCA}{\sin OCB} = -1.$$

Denn die drei Dreiecke, deren Spitzen in O liegen und deren Grundlinien die Seiten des Dreieckes ABC sind, geben die drei Gleichheiten:

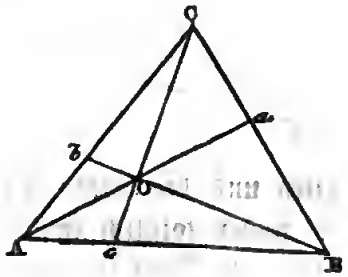
$$\frac{\sin OAB}{\sin OBA} = \frac{OB}{OA}, \quad \frac{\sin OBC}{\sin OCB} = \frac{OC}{OB}, \quad \frac{\sin OCA}{\sin OAC} = \frac{OA}{OC},$$

und diese in einander multiplicirt:

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OBA} \cdot \frac{\sin OCA}{\sin OCB} = 1.$$

Wenn der Punkt O innerhalb des Dreieckes ABC liegt, so ist jedes der drei Sinusverhältnisse negativ, und wenn der Punkt O außerhalb des Dreieckes liegt, so sind zwei dieser Verhältnisse negativ und das dritte ist positiv; also ihr Produkt stets negativ; folglich muß der zweite Theil $= -1$ sein. —

§. 205. Da man nach §. 202 in der Gleichung (3) für die Sinus der Winkel die Segmente setzen kann, welche die drei Geraden auf den Seiten des Dreieckes bilden; so hat man folgenden Satz:

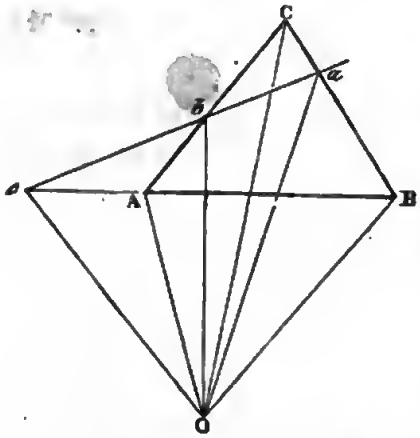


Die von einem Punkte O nach den drei Spitzen eines Dreieckes ABC gezogenen Geraden treffen die drei Seiten des Dreieckes in drei Punkten a, b, c von solcher Beschaffenheit, daß man die Gleichheit hat:

$$(4) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1.$$

§. 206. Die umgekehrten der beiden vorhergehenden Sätze

finden offenbar auch ſtatt; d. h.: Wenn man durch die Spitzen eines Dreieckes ABC drei Gerade ſo zieht, daß die eine oder die andere der Gleichungen (3), (4) ſtattfindet; ſo gehen die drei Geraden durch denſelben Punkt. —



§. 207. Wenn ein Dreieck ABC und eine Transverſale abc gegeben iſt, und man zieht von demſelben Punkte O Gerade nach den Spitzen des Dreieckes und nach den Punkten, worin die Transverſale die Gegenſeiten ſchneidet; ſo bilden dieſe Geraden ein Involutionsbüſchel. —

Denn das Dreieck ABC und die Transverſale bilden ein Viereck $ABab$, für welches C, c die Durchſchnittspunkte der Gegenſeiten ſind. Die betrachteten ſechs Geraden OA, OB, OC und ihre conjugirten Oa, Ob, Oc bilden folglich ein Involutionsbüſchel. (§. 195).

Umgekehrt: Wenn man von demſelben Punkte nach den drei Spitzen eines Dreieckes drei Gerade zieht, ſo wie drei andere Gerade, welche mit den drei erſten drei Involutionspaare bilden; ſo ſchneiden jene die Gegenſeiten des Dreieckes in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen. —

Denn es ſeien a, b, c die drei Punkte, und c' ſei der Punkt, worin die Gerade ab die Seite AB trifft; ſo bildet die Gerade Oc' nach dem eben bewieſenen Satze mit den fünf Geraden OA, Oa; OB, Ob und OC eine Involution; aber nach der Vorausſetzung auch die Gerade Oc, und folglich fällt der Punkt c' mit c zuſammen. Folglich ꝛc.

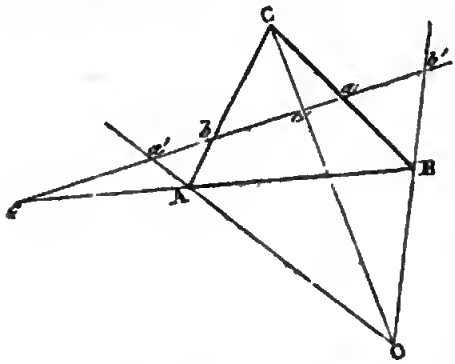
Wenn ſich die Transverſale ins Unendliche entfernt, ſo erhält man folgenden Lehrſatz:

Wenn man durch denſelben Punkt nach den Spitzen eines Dreieckes Gerade, und zu den Seiten deſſelben Pa-

rallelen zieht, so bilden diese sechs Geraden ein Involutionsbüschel. —

Und umgekehrt: Wenn man durch die Spitzen eines Dreieckes drei Gerade zieht, welche mit den Gegenseiten drei Paare von Geraden bilden, die zu den Strahlen eines Involutionsbüschels resp. parallel sind; so gehen diese drei Geraden durch denselben Punkt. —

Dieses ist nur ein anderer Ausdruck derselben Eigenschaft, welche in §. 204 angeführt wurde, nämlich: daß die nach den drei Spitzen eines Dreieckes gezogenen drei Geraden und die drei Seiten desselben alle Winkelrelationen der sechs Strahlen eines Involutionsbüschels darbieten. —



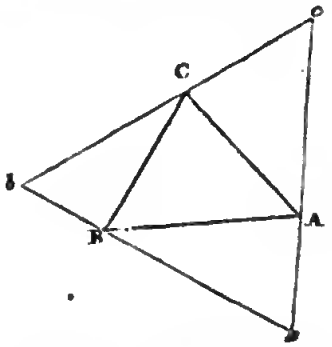
§. 208. Wenn man von demselben Punkte O nach den drei Spitzen eines Dreieckes ABC Gerade zieht, so trifft jede Transversale diese Geraden und die Seiten des Dreieckes in sechs Punkten $a, a'; b, b'; c, c'$ welche eine Involution bilden. —

Denn die beiden Geraden OA, OB und die beiden Dreiecksseiten AC, BC bilden ein Viereck, dessen Diagonalen die dritte Gerade OC und die dritte Dreiecksseite AB sind. Die Seiten und Diagonalen dieses Viereckes werden aber von einer Transversale in sechs Involutionspunkten geschnitten (§. 191). Folglich ꝛc.

Umgekehrt: Wenn man auf einer Transversale, welche die Seiten eines Dreieckes in drei Punkten schneidet, drei andere Punkte nimmt, welche mit jenen eine Involution bilden; so gehen die von diesen drei letzten Punkten nach den Winkelspitzen des Dreieckes gezogenen Geraden durch denselben Punkt. —

§. 209. Die beiden Lehrsätze in §§. 201 und 204 lassen sich in demselben Satz zusammenfassen, worin sie als besondere Fälle enthalten sind. — Dieser Satz drückt zugleich eine Eigenschaft von drei auf den Seiten eines Dreieckes genommenen Punkten, welche

in gerader Linie liegen können, und von drei durch die Winkelspitzen des Dreieckes gezogenen Geraden, welche durch denselben Punkt gehen können, aus, und lautet, wie folgt:



Wenn man durch die Spitzen eines Dreiecken ABC drei Gerade Aa, Bb, Cc zieht, welche ein zweites, dem ersten umschriebenes Dreieck bilden; so hat man die Relation:

$$(5)\quad \frac{Aa}{Ac}\cdot\frac{Bb}{Ba}\cdot\frac{Cc}{Cb}=-\frac{\sin aAC}{\sin aAB}\cdot\frac{\sin bBA}{\sin bBC}\cdot\frac{\sin cCB}{\sin cCA}.$$

Denn die drei Dreiecke aAB, bBC, cCA geben wegen der Proportionalität der Sinus ihrer Winkel uud der Gegenseiten drei Gleichheiten, welche in einander multiplicirt, folgende Relation geben:

$$\frac{Aa}{Ba}\cdot\frac{Bb}{Cb}\cdot\frac{Cc}{Ac}=\frac{\sin aBA}{\sin aAB}\cdot\frac{\sin bCB}{\sin bBC}\cdot\frac{\sin cAC}{\sin cCA}.$$

Um in diese Relation Verhältnisse von Sinussen solcher Winkel einzuführen, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, so daß die Zeichenregel darauf angewandt werden kann, setze man für die Winkel cAC, bCB, aBA ihre resp. Supplemente aAC, cCB, bBA; so geht die letzte Gleichheit in (5) über, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die vier Fälle näher betrachtet, welche die Figur darbieten kann. Denn die drei durch die Spitzen des Dreieckes ABC gezogenen Geraden, welche das umschriebene Dreieck abc bilden, können sein: 1) alle drei außerhalb des Dreieckes ABC, 2) alle drei innerhalb desselben, 3) nur eine innerhalb und zwei außerhalb, 4) oder zwei außerhalb und eine innerhalb. —

Aus diesem Satze lassen sich nun der in §. 201 und der in §. 204 folgendermaßen herleiten: 1) Betrachtet man A, B, C als Punkte der Seiten des Dreieckes abc, und nimmt an, daß diese Punkte in gerader Linie liegen; so findet man, daß der zweite Theil der Gleichung (5) in $+1$ übergeht, und man folglich hat:

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{Cc}{Cb} = +1,$$

welches der Satz in §. 201 ist. —

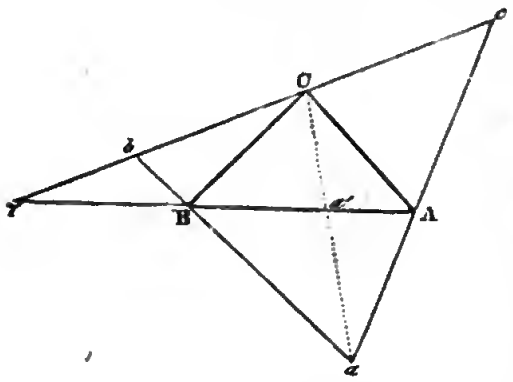
2) Wenn man annimmt, daß die durch die Spitzen des Dreieckes ABC gezogenen Geraden alle drei durch denselben Punkt O gehen sollen, so fallen die drei Punkte a, b, c in O zusammen, jedes der drei Verhältnisse im ersten Theile der Gleichung (5) wird $= 1$, und man erhält die Gleichheit:

$$\frac{\sin OAC}{\sin OAB} \cdot \frac{\sin OBA}{\sin OBC} \cdot \frac{\sin OCB}{\sin OCA} = -1,$$

welche den Lehrsatz in §. 204 ausdrückt. —

§. 210. Der Beweis des obigen Lehrsatzes oder der Gleichung (5) ist hinsichtlich der bloßen numerischen Gleichheit der beiden Theile sehr einfach, aber hinsichtlich des Zeichens nicht, weil man vier verschiedene Fälle der Figur untersuchen muß. — Wenn man statt eines Dreieckes ein beliebiges Vieleck zu betrachten hätte, so könnte man eine weit größere Anzahl solcher Fälle zu untersuchen haben, was mit wirklichen Schwierigkeiten verbunden sein könnte, und überhaupt kein wissenschaftlich genügendes Verfahren ist. — Es ist also zu wünschen, daß man bei Sätzen wie der vorhergehende vollständige Beweisarten anwenden kann, welche von selbst allen Bedingungen der Zeichen entsprechen. — Der Begriff des anharmonischen Verhältnisses und die sich daraus einfach und natürlich ergebenden Theorien scheinen uns dazu geeignet zu sein: solche adäquate Beweise an die Hand zu geben, und in dieser Beziehung haben diese Theorien in der neuern Geometrie einen sie wesentlich unterscheidenden Charakter, welcher darin besteht: daß sie den geometrischen Begriffen alle Allgemeinheit analytischer Resultate geben. — Es wird deshalb zweckmäßig sein, die Anwendung dieser Theorien möglichst zu erweitern, und sie selbst auf solche Sätze anzuwenden, für welche die gewöhnlichen Hülfsmittel der Geometrie, wie die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke, oder die zwischen den Seiten und den Sinussen der Gegenwinkel beliebiger Dreiecke, ꝛc. einfache Beweise liefern, besonders aber, wenn diese Beweise nur einen Theil des zu bewei-

senden Lehrsatzes umfassen, wie solches bei dem vohergehenden Satze der Fall war. — Wir wollen deshalb die in Rede stehende Methode auch auf den Satz in § 209 anwenden und noch zwei neue Beweise desselben hier folgen lassen. —



I. Die von dem Punkte a nach den Spitzen des Dreieckes ABC gezogenen Geraden geben nach §. 204 die Relation:

$$\frac{\sin a\,A\,C}{\sin a\,A\,B} \cdot \frac{\sin b\,B\,A}{\sin b\,B\,C} \cdot \frac{\sin a\,C\,B}{\sin a\,C\,A} = -1,$$

und die Gerade AB, welche die drei Seiten des Dreieckes $a\,b\,c$ durchschneidet, gibt nach §. 201:

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{\gamma c}{\gamma b} = 1;$$

folglich ist:

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{\gamma c}{\gamma b} = -\frac{\sin a\,A\,C}{\sin a\,A\,B} \cdot \frac{\sin b\,B\,A}{\sin b\,B\,C} \cdot \frac{\sin a\,C\,B}{\sin a\,C\,A}.$$

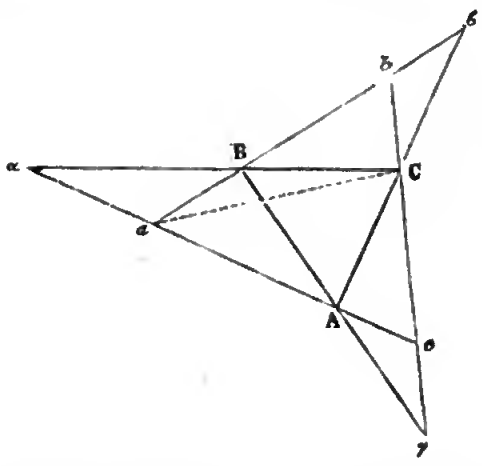
Nun ist aber das anharmonische Verhältniß der von dem Punkte C ausgehenden vier Geraden CA, Ca, CB, Cc dem der vier Punkte A, a', B, γ gleich, welches wegen der in a zusammenlaufenden Geraden dem der vier Punkte c, C, b, γ gleich ist. Man hat also die Gleichheit:

$$\frac{\sin a\,C\,A}{\sin a\,C\,B} : \frac{\sin c\,C\,A}{\sin c\,C\,B} = \frac{Cc}{Cb} : \frac{\gamma c}{\gamma b},$$

und mithin wird die vorhergehende Gleichheit:

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{Cc}{Cb} = -\frac{\sin a\,A\,C}{\sin a\,B\,C} \cdot \frac{\sin b\,B\,A}{\sin b\,B\,C} \cdot \frac{\sin c\,C\,B}{\sin c\,C\,A}.$$

w. b. w. f.



II. Die drei Dreiecke aAB, bBC, cCA, welche resp. von den Transversalen bc, ca, ab geschnitten werden, geben die drei Gleichheiten:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{bB}{ba} \cdot \frac{ca}{cA} = 1,$$

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{cC}{cb} \cdot \frac{ab}{aB} = 1,$$

$$\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A} \cdot \frac{aA}{ac} \cdot \frac{bc}{bC} = 1,$$

und wenn man sie in einander multiplicirt; so erhält man:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\varepsilon C}{\varepsilon A} \cdot \frac{bB}{cA} \cdot \frac{cC}{aB} \cdot \frac{aA}{bC} = -1,$$

oder:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cA} = -\frac{\alpha C}{\alpha B} \cdot \frac{\varepsilon A}{\varepsilon C} \cdot \frac{\gamma B}{\gamma A}.$$

Nach §. 202 hat man aber in dem Dreieck ABC:

$$\frac{\alpha C}{\alpha C} \cdot \frac{\varepsilon A}{\varepsilon C} \cdot \frac{\gamma B}{\gamma A} = \frac{\sin aAC}{\sin aAB} \cdot \frac{\sin bBA}{\sin bBC} \cdot \frac{\sin cCB}{\sin cCA};$$

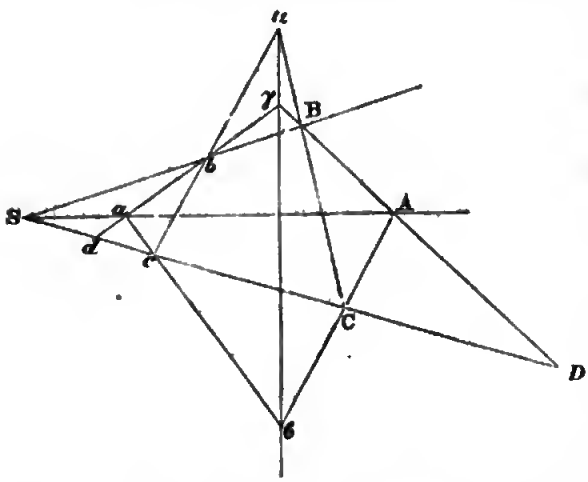
folglich:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cA} = -\frac{\sin aAC}{\sin aAB} \cdot \frac{\sin bBA}{\sin bBC} \cdot \frac{\sin cCB}{\sin cCA};$$

w. b. w. f.

§. 211. Wenn die Spitzen zweier Dreiecke paarweise auf drei durch denselben Punkt gehenden Geraden liegen, so durchschneiden sich ihre Seiten paarweise in drei in gerader Linie liegenden Punkten. —

Es seien ABC, abc die beiden Dreiecke, deren Spitzen je zwei und zwei auf den drei durch den Punkt S gehenden Geraden Aa, Bb, Cc liegen; so wird behauptet: daß die drei Seiten AB,



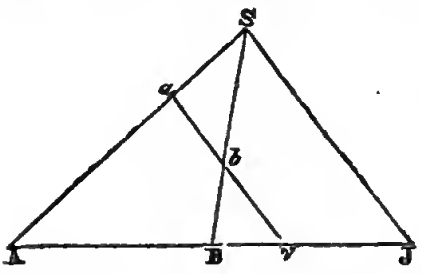
BC, CA des erſten die drei Seiten ab, bc, ca des zweiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten α, β, γ ſchneiden.

Denn die beiden Seiten AB, ab treffen die Gerade SCc in zwei Punkten D, d, und man hat auf dieſen beiden Seiten reſp. die beiden Syſteme von vier Punkten A, D, B, γ und a, d, b, γ, deren anharmoniſche Verhältniſſe gleich ſind, weil ſich die drei Geraden Aa, Dd, Bb in demſelben Punkte S treffen. Mithin iſt das anharmoniſche Verhältniß der von dem Punkte C ausgehenden vier Geraden CA, CD, CB, $C\gamma$ dem der von dem Punkte c ausgehenden vier Geraden ca, cd, cb, $c\gamma$ gleich. In dieſen beiden Büſcheln fallen aber die beiden homologen Strahlen CD, cd zuſammen, und folglich treffen die drei andern Strahlen des erſten Büſchels die drei homologen Strahlen des zweiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten (§. 28). Mithin liegen die drei Punkte α, β, γ in gerader Linie.

§. 212. Umgekehrt: Wenn zwei Dreiecke ſo beſchaffen ſind, daß ſich ihre Seiten je zwei und zwei in drei in gerader Linie liegenden Punkten ſchneiden; ſo liegen ihre Spitzen auf drei durch denſelben Punkt gehenden Geraden.

Wenn die drei Punkte α, β, γ in gerader Linie liegen, ſo wird behauptet: daß die drei Geraden Aa, Bb, Cc durch denſelben Punkt gehen. — Denn das anharmoniſche Verhältniß der von dem Punkte C ausgehenden vier Geraden $C\gamma$, $C\alpha$, Cc, $C\beta$ iſt dem der von dem Punkte c ausgehenden vier Geraden $c\gamma$, ca, cC, $c\beta$ gleich, weil dieſe die Gerade $\alpha\beta\gamma$ in denſelben Punkten ſchneiden, als jene. Folglich iſt das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte γ, B, A, D dem der vier Punkte γ, b, a, d gleich, und mithin gehen die drei Geraden Bb, Dd, Aa oder Bb, Cc, Aa durch denſelben Punkt (§. 25).

Die beiden letzten Sätze werden Desargues zugeschrieben und sind von mehreren geometrischen Schriftstellern bewiesen; in der letzten Zeit auch von Poncelet, welcher die beiden Dreiecke ABC, abc homologische, den Durchschnittspunkt S der Verbindungslinien ihrer entsprechenden Spitzen den Mittelpunkt der Homologie und die Gerade $\beta\gamma\alpha$, worauf sich die Seiten paarweise schneiden, die Axe der Homologie nennt. —



§. 213. Wenn auf einer ersten Geraden zwei Punkte A, B, so wie auf einer zweiten Geraden zwei Punkte a, b genommen, dann die sich in einem Punkte S schneidenden Geraden Aa, Bb gezogen werden, und man läßt die zweite Gerade sich um ihren Durchschnittspunkt γ mit der ersten drehen; so ändert der Punkt S seine Lage, und es findet Folgendes statt:

1) die durch den Punkt S zu ab gezogenen Parallele schneidet in jeder ihrer Lagen die Gerade AB immer in demselben Punkte J;

2) der Punkt S beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt J ist. —

Denn das anharmonische Verhältniß der vier Punkte A, B, γ, J ist dem der vier Punkte a, b, γ, ∞ gleich, wodurch die Lage des Punktes J bestimmt wird, und folglich bleibt diese Lage dieselbe, wenn sich die Gerade ab um den Punkt γ drehet, wodurch der erste Theil des Satzes bewiesen ist. — Was den zweiten Theil betrifft, so geben die ähnlichen Dreiecke $SBJ, bB\gamma$:

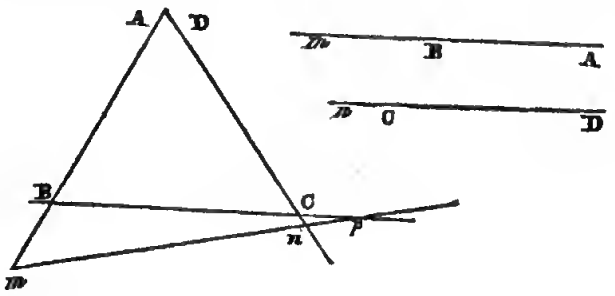
$$\frac{SJ}{b\gamma} = \frac{BJ}{B\gamma} \text{ oder } SJ = \frac{BJ \cdot b\gamma}{B\gamma}.$$

Dieser Werth von SJ ist aber constant, und folglich beschreibt der Punkt S einen Kreis, dessen Mittelpunkt J ist. —

Anwendungen der vorhergehenden Lehrsätze zum Beweise verschiedener Eigenschaften des Dreieckes.

§. 214. Der Satz in §. 201 ist allgemein unter dem Namen

des Ptolomäiſchen Lehrſatzes bekannt; allein man findet denſelben ſchon in den Schriften des Menelaus, eines faſt um ein Jahrhundert ältern Geometers. — Bei den Alten diente dieſer Satz hauptſächlich dazu: das Produkt zweier Verhältniſſe durch ein einziges Verhältniß darzuſtellen. — Will man z. B.



das Produkt der beiden Verhältniſſe $\frac{mA}{mB}$, $\frac{nD}{nC}$ durch ein Verhältniß darſtellen, ſo legt man die beiden Geraden mA, nD ſo, daß ihre Endpunkte A, D zuſammenfallen und das Dreieck BAC gebildet wird, worin die Gerade mn auf der Baſis BC zwei Segmente pC, pB beſtimmt, deren Verhältniß $\frac{pC}{pB}$ dem Produkte der gegebenen Verhältniſſe gleich iſt (§. 201).

Der Lehrſatz in §. 205 wird gewöhnlich Joh. Bernoulli zugeſchrieben; allein derſelbe iſt früher von dem italieniſchen Geometer Joh. de Ceva bewieſen.

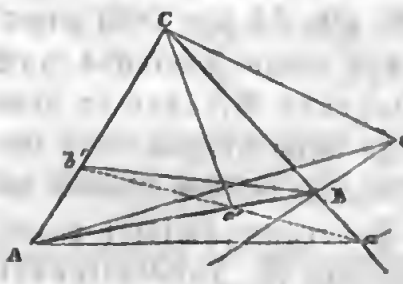
Von den beiden erwähnten Sätzen hat man bisher einen ſpeciellen und einen allgemeinen Gebrauch gemacht. — Der ſpecielle Gebrauch beſteht darin: zu beweiſen, daß drei Punkte einer Figur in gerader Linie liegen, oder daß drei Gerade durch denſelben Punkt gehen. So z. B. läßt ſich ſehr leicht zeigen: daß ſich die von den Winkelſpitzen eines Dreieckes nach den Mitten der Gegenſeiten gezogenen Geraden in demſelben Punkte ſchneiden; ꝛc. ꝛc. In ihrem allgemeinen Gebrauche können die beiden fraglichen Lehrſätze bei dem Beweiſe andere Sätze als Verbindungs- oder Uebergangsmittel dienen. — So kann man z. B. vermittelſt derſelben die Involutionseigenſchaften des Viereckes beweiſen; u. d. gl. — Allein dieſe Anwendungen ſind ſehr beſchränkt, und die Beweiſe mittelſt derſelben

im Allgemeinen beiweitem nicht so einfach und leicht, als mittelst der Theorie des anharmonischen Verhältnisses. Dieses ist auch leicht einzusehen; denn abgesehen davon, daß die beiden in Rede stehenden Sätze weniger einfach sind, als der Begriff des anharmonischen Verhältnisses, und folglich weniger zu Anwendungen geeignet, reduciren sie sich gleichsam auf sich selbst und geben keine ausgedehnten Theorien, wie die des anharmonischen Verhältnisses, der homographischen Theilung und der Involution, welche letztern eigentlich weiter nichts sind, als weitere Entwickelungen des einfachen und elementaren Begriffes des anharmonischen Verhältnisses. —

Bisher hat man blos die beiden erwähnten Lehrsätze angewandt, worin die Segmente betrachtet werden, welche drei Punkte auf den Seiten eines Dreieckes bestimmen; allein man muß damit nothwendig die beiden entsprechenden Sätze in §. 203 und §. 204 verbinden, die auf die Sinus der Winkel Bezug haben, welche die von den Spitzen des Dreieckes nach diesen Punkten gezogenen Geraden mit den Seiten desselben bilden; denn diese Sätze gestatten ebenfalls, und vielleicht noch zahlreichere Anwendungen. —

Die Lehrsätze, wobei zugleich eine Transversale und ein fester Punkt in der Ebene des Dreieckes in Betracht kommen, und welche eine mehr direkte Anwendung der Theorie der Involution gestatten, sind, wie wir bald sehen werden, ebenfalls von Nutzen. —

§. 215. Die Polaren desselben Punktes in Bezug auf die drei Winkel eines Dreieckes treffen die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten.



Denn es seien Aa', Bb', Cc' die Polaren des Punktes O in Bezug auf die drei Winkel des Dreieckes ABC und a', b', c' resp. die Punkte, worin sie die Gegenseiten treffen; so hat man für die von dem Punkte O ausgehenden drei Geraden die Gleichung (3) in §. 204. Da aber die beiden Geraden OA, Aa' den Winkel A harmonisch theilen, so hat man:

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC} = -\frac{\sin a'AB}{\sin a'AC}, \quad (\S.\ 52)$$

und ebenso:

$$\frac{\sin OBC}{\sin OBA} = -\frac{\sin b'BC}{\sin b'BA}, \quad \frac{\sin OCA}{\sin OCB} = -\frac{\sin c'CA}{\sin c'CB},$$

so daß die Gleichung (3) in folgende übergeht:

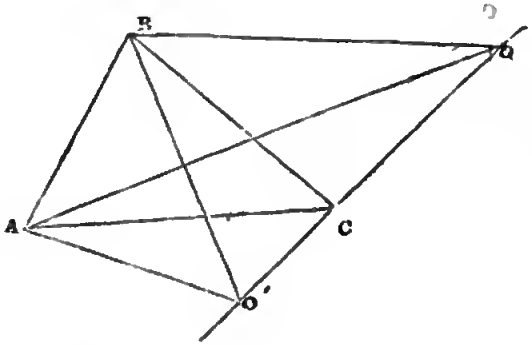
$$\frac{\sin a'AB}{\sin a'AC} \cdot \frac{\sin b'BC}{\sin b'BA} \cdot \frac{\sin c'CA}{\sin c'CB} = +1,$$

welche zeigt: daß die drei Punkte a', b', c' in gerader Linie liegen (203). —

Wenn der Punkt O in unendlicher Entfernung liegt, so sind die drei Geraden OA, OB, OC parallel, und man hat den Satz:

Wenn in der Ebene eines Dreieckes eine Transversale gezogen wird, so schneiden die aus den Spitzen nach den Mitten der zwischen den Schenkeln seiner Winkel liegenden Segmente dieser Transversale gezogenen Geraden die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten.

§ 216. Die Polaren eines Punktes in Beziehung auf auf zwei Winkel eines Dreieckes schneiden sich auf der Geraden, welche diesen Punkt mit der Spitze des dritten Winkels verbindet. —



Es sei O' der Durchschnittspunkt der Polaren des Punktes O in Bezug auf die beiden Winkel A, B, so wird behauptet: daß der Punkt O' auf der Geraden OC liegt. — Denn da AO', BO' die Polaren des Punktes O sind, so hat man:

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC} = -\frac{\sin O'AB}{\sin O'AC} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OBA} = -\frac{\sin O'BC}{\sin O'BA}$$

und folglich wird die Gleichung (3) in Bezug auf die drei vom Punkte O ausgehenden Geraden (§. 204):

$$\frac{\sin O'AB}{\sin O'AC} \cdot \frac{\sin O'BC}{\sin O'BA} \cdot \frac{\sin OCA}{\sin OCB} = -1.$$

Aber wenn man die Gerade $O'C$ zieht, so hat man:

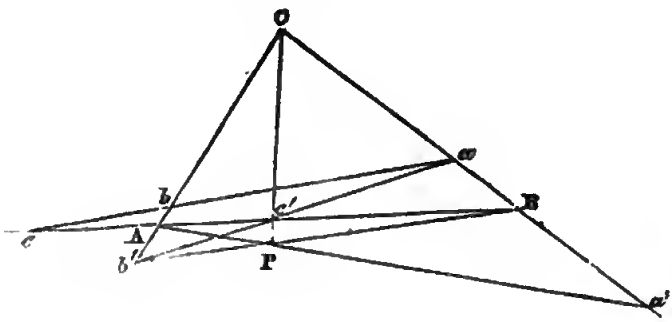
$$\frac{\sin O'AB}{\sin O'AC} \cdot \frac{\sin O'BC}{\sin O'BA} \cdot \frac{\sin O'CA}{\sin O'CB} = -1, \text{ (§. 204)}$$

folglich:

$$\frac{\sin OCA}{\sin OCB} = \frac{\sin O'CA}{\sin O'CB},$$

woraus erhellet: daß die beiden Geraden $OC, O'C$ zusammenfallen, also der Punkt O' auf OC liegt. —

§. 217. Wenn man in der Ebene eines Dreieckes ABC eine Transversale zieht, welche die Seiten desselben in den Punkten a, b, c schneidet, und man nimmt auf jeder Seite den harmonisch conjugirten ihres Durchschnittspunktes mit der Transversale in Bezug auf die beiden daranliegenden Scheitel des Dreieckes; so gehen die drei Geraden, welche die so bestimmten drei Punkte a', b', c' mit den gegenüberliegenden Spitzen des Dreieckes verbinden, durch denselben Punkt P. —



Denn man hat:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1, \text{ (§. 201)}$$

und:

$$\frac{aB}{aC} = -\frac{a'B}{a'C}, \quad \frac{bC}{bA} = -\frac{b'C}{b'A}, \frac{cA}{cB} = -\frac{c'A}{c'B}; \text{ (§. 33)}$$

folglich:

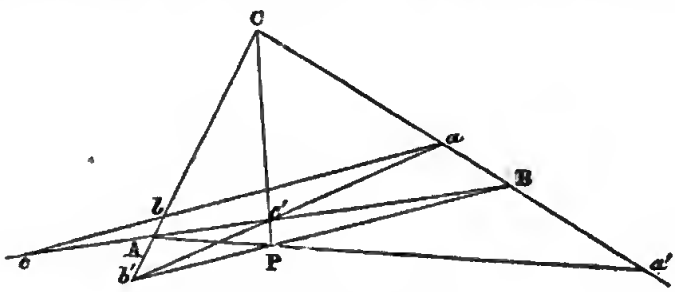
$$\frac{a'B}{aC} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = -1,$$

woraus erhellet: daß die drei Geraden Aa', Bb', Cc' durch denselben Punkt gehen (§. 205).

Wenn die Transversale in unendliche Entfernung rückt; so folgt hieraus: Die von den Spitzen eines Dreieckes nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Geraden durchschneiden sich in demselben Punkte. —

§. 218. Wenn man in der Ebene eines Dreieckes eine Transversale zieht und auf zwei Seiten die Punkte nimmt, welche mit der Transversale diese Seiten harmonisch theilen; so liegen die beiden so bestimmten Punkte mit dem Durchschnittspunkte der dritten Seite und der Transversale in gerader Linie. —

Denn die Transversale schneidet die Seiten des Dreieckes ABC



in drei Punkten a, b, c, für welche man hat:

$$\frac{aB}{aC}, \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1, \text{ (201)}$$

und wenn man auf den beiden Seiten AB, AC die beiden Punkte c', b' bestimmt, welche mit c, b diese Seiten harmonisch theilen; so hat man:

$$\frac{cA}{cB} = -\frac{c'A}{c'B}, \frac{bC}{bA} = -\frac{b'C}{b'A};$$

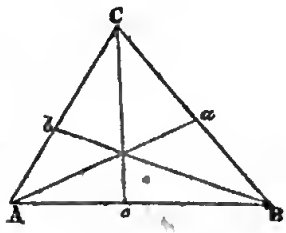
folglich:

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1,$$

woraus erhellet: daß die drei Punkte b', c', a in gerader Linie liegen. —

§. 219. In jedem Dreiecke gehen die Halbirungslinien der drei Winkel durch denselben Punkt. —

Denn jedes der drei Verhältnisse:



$$(\alpha) \quad \frac{\sin a\,AB}{\sin a\,AC}, \frac{\sin b\,BC}{\sin b\,BA}, \frac{\sin c\,CA}{\sin c\,CB}$$

ist offenbar $= -1$; folglich ist auch ihr Produkt $= -1$, woraus folgt: daß die drei Winkelhalbirenden durch denselben Punkt gehen. —

§. 220. In jedem Dreiecke treffen die Halbirenden der Supplemente der drei Winkel die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten.

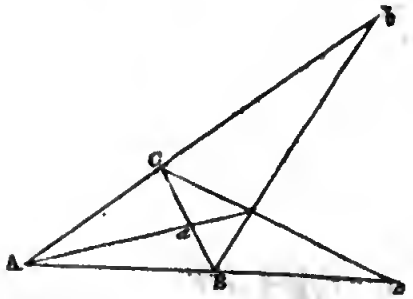
Denn wenn a, b, c Punkte dieser Halbirenden sind, so ist jedes der drei Verhältnisse $(\alpha) = +1$, ihr Produkt mithin auch $= +1$; und folglich treffen die drei Halbirenden die drei Seiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten. —

§. 221. In jedem Dreiecke treffen die Halbirenden zweier Winkel und des Supplementes des dritten Winkels die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten. —

Denn zwei der drei Verhältnisse (α) sind $= -1$ und das dritte ist $= +1$; folglich ihr Produkt $= +1$, woraus folgt: daß die drei Punkte a, b, c in gerader Linie liegen. —

§. 122. In jedem Dreiecke schneiden sich die Halbirenden der Supplemente zweier Winkel auf der Halbirenden des dritten Winkels. —

Denn für die Halbirenden der Supplemente der beiden Winkel B, C ist:

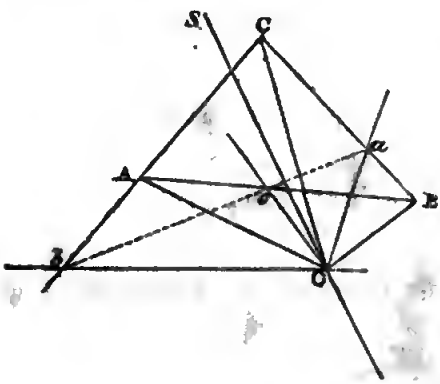


$$\frac{\sin b\,BC}{\sin b\,BA} = +1 = \frac{\sin c\,CA}{\sin c\,CB},$$

und für die Halbirende des Winkels A ist das Verhältniß $\frac{\sin a\,AB}{\sin a\,AC} = -1$; folglich das Produkt dieser drei Verhältnisse $= -1$, was beweist, daß die drei Halbirenden durch denselben Punkt gehen. —

§. 223. Wenn man aus demselben Punkte Strahlen nach den drei Spitzen eines Dreieckes zieht, so schneiden die in diesem Punkte auf diesen Strahlen errichteten Perpendikel die gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes in drei in gerader Linie liegenden Punkten.

Denn die drei Strahlen und ihre Perpendikel bilden ein Involutionsbüschel (§. 152), und folglich schneiden sie die drei Seiten des Dreieckes in drei in gerader Linie liegenden Punkten (§. 207).



§. 224. Wenn man durch denselben Punkt O drei Gerade zieht, welche mit OA, OB, OC Winkel bilden, die dieselbe Halbirende OL haben; so treffen diese drei Geraden die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c. — Denn sie bilden mit OA, OB, OC eine Involution (§. 153).

§. 225. Wenn man von den Spitzen eines Dreieckes auf die Gegenseiten Perpendikel zieht, so bilden sie mit den Seiten sechs Gerade, zwischen welchen die Involutionsrelationen stattfinden (§. 152), und folglich gehen diese drei Perpendikel durch denselben Punkt (§. 207).

Ebenso ergibt sich der Satz:

Wenn man aus den Spitzen eines Dreieckes nach den

Gegenseiten schiefe Linien unter Winkeln zieht, deren Halbirende zu derselben Geraden parallel sind; so gehen diese drei schiefen Geraden durch denselben Punkt. —

Denn sie stehen mit den Seiten des Dreieckes in Involutionsbeziehungen. (§. 153).

§. 226. Wenn man die Halbirenden der Winkel zieht, unter welchen die drei Seiten eines Dreieckes von einem gewissen Punkte aus erscheinen, sowie die Halbrrenden der Supplemente dieser Winkel; so schneiden die letztern die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten, und dasselbe ist der Fall mit zwei der ersten Halbirenden und der des Supplementes des dritten Winkels.—

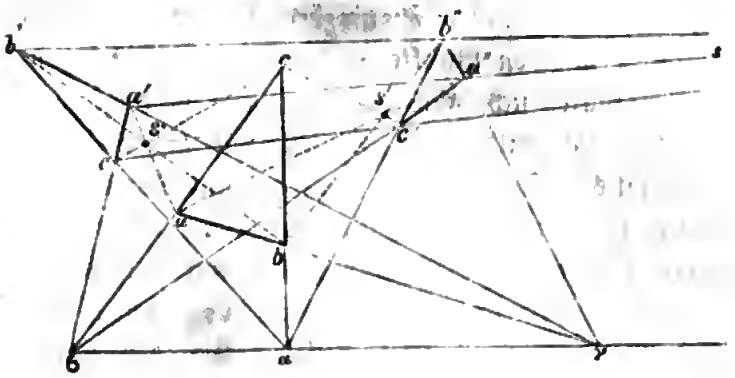
Denn die in jedem Falle betrachteten drei Winkelhalbirenden bilden mit den nach den Spitzen des Dreieckes gezogenen Geraden eine Involution (§. 171*), und folglich treffen sie die Gegenseiten in drei in gerader Linie liegenden Punkten. —

Ferner treffen die Halbirenden der drei Winkel die Gegenseiten des Dreiecks in drei solchen Punkten: daß die von diesen Punkten nach den gegenüberliegenden Spitzen gezogenen Geraden sich in demselben Punkte schneiden — und dasselbe ist der Fall bei der Halbirenden eines der drei Winkel und denen der Supplemente der beiden andern Winkel. —

Dieser Satz ist nach §. 217 eine unmittelbare Folge aus dem vorhergehenden.

§. 227. Wenn drei paarweise homologische Dreiecke (§. 212) dieselbe Axe der Homologie haben, so liegen ihre drei Mittelpunkte der Homologie in gerader Linie.

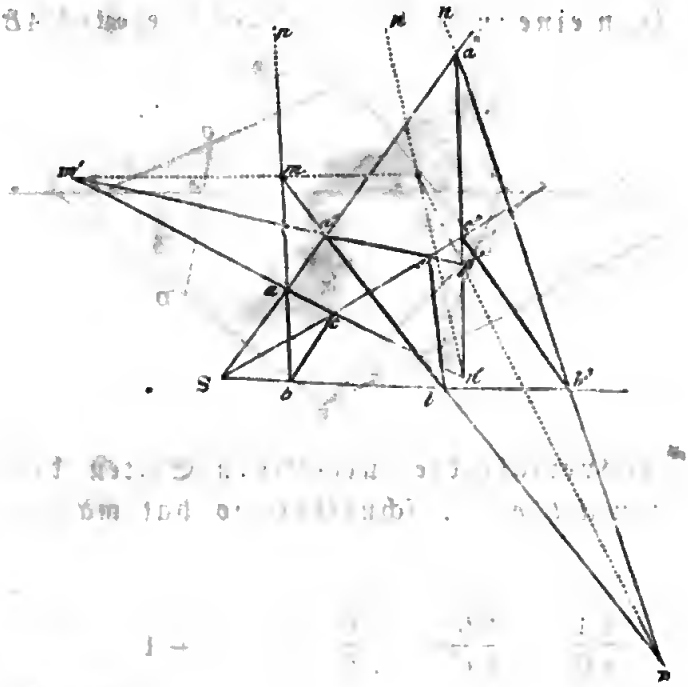
Es seien $abc, a'b'c, a''b''c''$ die drei Dreiecke, deren homologe Seiten sich je drei in drei in gerader Linie liegenden Punkten α, β, γ schneiden; so geben die drei Seiten $ab, a'b', a''b''$ die beiden Dreiecke $aa'a'', bb'b''$, deren Spitzen paarweise auf drei durch denselben Punkt γ gehenden Geraden liegen. Folglich schneiden die drei Seiten $aa', aa'', a'a''$ des einen die drei Seiten $bb', bb'', b'b''$ des



andern in drei in gerader Linie liegenden Punkten (§. 211), und diese Punkte sind die drei Mittelpunkte der Homologie der drei gegebenen Dreiecke, je zwei und zwei genommen; folglich ꝛc.

Zwei homologische Dreiecke, deren Axe der Homologie in unendlicher Entfernung liegt, werden homothetische (ähnliche und ähnlich liegende) genannt. Wenn also drei Dreiecke paarweise homothetische sind, so liegen ihre Mittelpunkte der Aehnlichkeit oder Homothetie in gerader Linie. —

§. 228. Wenn drei paarweise homologische Dreiecke denselben Mittelpunkt der Homologie haben, so gehen ihre drei Axen der Homologie durch denselben Punkt. —

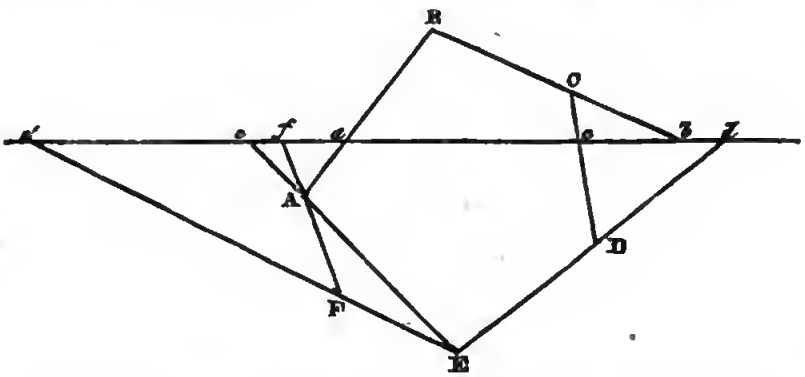


Es seien $abc, a'b'c', a''b''c''$ die drei Dreiecke, deren Spitzen je drei auf drei in demselben Punkte S, dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Homologie, sich schneidenden Geraden liegen. Die drei Seiten $ab, a'b', a''b''$ bilden ein Dreieck, und die drei Seiten ac, $a'c', a''c''$ ebenfalls. Diese beiden Dreiecke, sind homologisch, weil die drei Seiten des einen die des andern resp. in drei in gerader Linie liegenden Punkten a, a', a'' schneiden; und folglich liegen die Spitzen der beiden Dreiecke paarweise auf drei durch denselben Punkt gehenden Geraden (§. 212). Diese Geraden sind aber die Axen der Homologie der drei gegebenen Dreiecke; folglich ꝛc.

Es ließen sich über das Dreieck noch viele andere Sätze und Relationen aufstellen, und wir haben nur die mitgetheilt, welche Anwendungen gestatten. Auch für die Vielecke gibt es ähnliche Sätze und Relationen, wovon die in Bezug auf das Dreieck nur peciell Fälle sind, und bei welchen die Zeichenregel ebenfalls auf die betrachteten Segmente und Winkel angewandt werden kann — Wir wollen deshalb über die Vielecke einige dieser Lehrsätze hier mittheilen. —

Eigenschaften der Vielecke.

§. 229. Wenn eine in der Ebene eines Vieleckes $ABCD\ldots$



gezogene Transversale die successiven Seiten desselben in den Punkten $a, b, c, \ldots$ schneidet; so hat man die Relation:

$$(1) \qquad \frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \ldots = +1,$$

wenn auf die beiden Abschnitte jeder Seite die Zeichenregel angewandt wird. —

Wir wollen zeigen: daß, wenn der Satz für ein Vieleck von n Seiten wahr ist, er es auch für ein Vieleck von $n+1$ Seiten ist. — Wenn der Lehrsatz für ein Vieleck $ABC....E$ von n Seiten gilt, so hat man die Gleichheit:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \ldots \cdot \frac{eE}{eA} = 1.$$

Bildet man nun ein Vieleck von $n+1$ Seiten, indem man für die Seite EA zwei andere EF, FA setzt; so hat man in dem von der Transversale geschnittenen Dreieck AEF die Gleichheit:

$$\frac{eA}{eE} \cdot \frac{e'E}{e'F} \cdot \frac{fF}{FA} = 1,$$

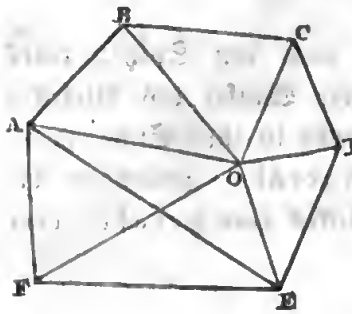
und wenn man die beiden Gleichheiten in einander multiplicirt:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \ldots \cdot \frac{fF}{FA} = 1,$$

welches die Gleichung für ein Vieleck von $n+1$ Seiten ist. — Wenn also der Lehrsatz für ein Vieleck von n Seiten gilt, so gilt er auch für ein Vieleck von $n+1$ Seiten. — Nun gilt er aber für ein Dreieck (§. 201), folglich auch für ein Viereck, ꝛc.

Aus der Gleichung (1) erhellet: daß die Anzahl der negativen Verhältnisse von $\frac{aA}{aB}, \ldots$ immer eine gerade ist, so daß man den Satz hat:

Eine Transversale in der Ebene eines Vieleckes trifft immer eine gerade Anzahl seiner Seiten selbst. —



§. 230. Wenn man von einem Punkte O nach den Spitzen eines Vieleckes $ABC...$ Strahlen zieht, so findet zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese Strahlen mit den daranliegenden Seiten bilden, folgende Relation statt:

$$(2)\quad \frac{\sin OAB}{\sin OAE}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin OBA}\cdots\frac{\sin OEA}{\sin OED}=\pm 1,$$

wo das obere, oder das untere Zeichen gilt, jenachdem die Anzahl n der Winkelspitzen oder der Seiten des Viereckes eine gerade, oder eine ungerade ist. —

Dieser Satz wird auf ähnliche Art wie der vorhergehende bewiesen, indem man zeigt: daß derselbe für ein Vieleck von $n+1$ Seiten gilt, wenn er für ein Vieleck von n Seiten wahr ist. — Bildet man zu dem Zweck ein Vieleck von $n+1$ Seiten, indem man zwischen den Spitzen A und E eine neue Spitze F einschaltet, oder für die Seite AE die beiden Seiten AF, EF setzt; so hat man in dem Dreiecke EFA die Gleichheit:

$$\frac{\sin OAE}{\sin OAF}\cdot\frac{\sin OFA}{\sin OFE}\cdot\frac{\sin OEF}{\sin OEA}=-1.$$

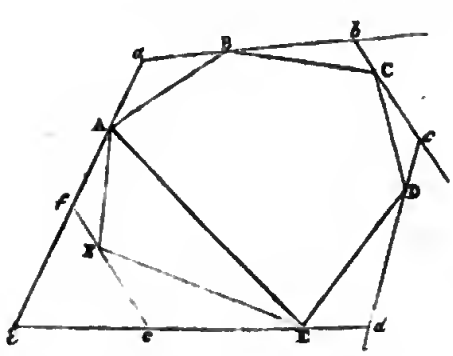
Multiplicirt man diese Gleichheit durch (2), welche nach der Voraussetzung stattfindet; so erhält man:

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAF}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin OBA}\cdots\frac{\sin OEF}{\sin OED}\cdot\frac{\sin OFA}{\sin OFE}=\pm 1.$$

Diese Gleichung zeigt: daß der Satz für ein Vieleck von $n+1$ Ecken oder Seiten gilt, wenn er für ein Vieleck von n Seiten gilt. — Nun gilt er aber für ein Dreieck (204), mithin auch für ein Viereck, u. s. w.

Aus der letzten Gleichung folgt: daß die Anzahl der negativen Sinusverhältnisse eine gerade, oder ungerade ist, jenachdem die Anzahl der Seiten des Vieleckes eine gerade, oder ungerade ist. — Man hat also den Satz:

Die Anzahl der von einem Punkte nach den Spitzen eines Vieleckes gezogenen Strahlen, welche in die Winkel des Vieleckes selbst oder deren Scheitelwinkel und nicht in ihre Supplementwinkel fallen, ist eine gerade, oder ungerade, jenachdem die Anzahl der Spitzen oder Seiten des Vieleckes eine gerade, oder ungerade ist. —



§. 231. Wenn man durch die Spitzen eines Vieleckes $ABCDEF$ beliebige Gerade Aa, Bb, ... zieht, welche ein dem ersten **umschriebenes** Vieleck $abcdef$ bilden; so hat man die Relation:

$$(3)\quad \frac{Aa}{Af}\cdot\frac{Bb}{Ba}\cdots\frac{Ff}{Fe}=\pm\frac{\sin aAF}{\sin aAB}\cdot\frac{\sin bBA}{\sin bBC}\cdots\frac{\sin fFE}{\sin fFA},$$

wo das **obere**, oder **untere** Zeichen gilt, jenachdem die Anzahl der Seiten des Vieleckes eine **gerade**, oder **ungerade** ist. —

Wir wollen wieder beweisen: daß, wenn der Satz für ein Vieleck von n Seiten gilt, er auch für ein Vieleck von $n+1$ Seiten $ABCDEF$ stattfindet. — Für das Vieleck von n Seiten $ABCDE$ ist aber nach der Voraussetzung:

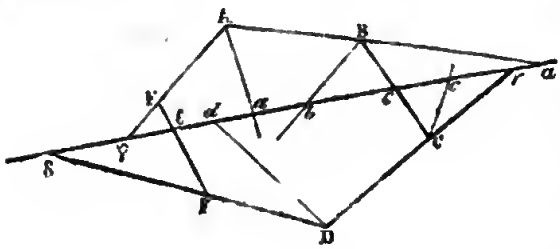
$$\frac{Aa}{A\varepsilon}\cdot\frac{Bb}{Ba}\cdots\frac{E\varepsilon}{Ed}=\pm\frac{\sin aAE}{\sin aAB}\cdot\frac{\sin bBA}{\sin bBC}\cdots\frac{\sin\varepsilon ED}{\sin\varepsilon EA}$$

und für das Dreieck AEF hat man:

$$\frac{A\varepsilon}{AF}\cdot\frac{Ee}{E\varepsilon}\cdot\frac{Ff}{Fe}=-\frac{\sin\varepsilon AF}{\sin\varepsilon AE}\cdot\frac{\sin eEA}{\sin eEF}\cdot\frac{\sin fFE}{\sin fFA}\quad\text{(§. 209).}$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichheiten in einander, so erhält man die Gleichheit (3). Wenn also der Satz für ein Vieleck von n Seiten gilt, so findet er auch für ein Vieleck von $n+1$ Seiten statt. — Nun ist derselbe aber für ein Dreieck bewiesen; folglich gilt er auch für ein Viereck, Fünfeck, ...

Die beiden Sätze in §. 229 und §. 230 können als besondere Fälle des gegenwärtigen betrachtet werden, wie bei dem Dreiecke (§. 209).



§. 232. Wenn durch die Spitzen eines Vieleckes $ABC...$ beliebige Gerade Aa, Bb, Cc, ... gezogen werden, und eine

Transversale trifft die Seiten des Vieleckes in den Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ so wie diese Geraden in den Punkten $a, b, c, \ldots$; so hat man zwischen den Sinussen der Winkel, welche die gezogenen Geraden mit den Seiten des Vieleckes bilden, und den Segmenten, welche diese Winkel auf den Transversale abschneiden, die Relation:

$$(4)\quad \frac{\sin aAB}{\sin aAF}\cdot\frac{\sin bBC}{\sin bBA}\cdot\frac{\sin cCD}{\sin cCB}\ldots = -\frac{a\alpha}{a\varphi}\cdot\frac{b\beta}{ba}\cdot\frac{c\gamma}{c\beta}\ldots,$$

wo das **obere**, oder **untere** Zeichen gilt, jenachdem die Zahl der Seiten des Vieleckes eine **gerade**, oder **ungerade** ist. —

Denn zieht man von einem Punkte O der Transversale Gerade nach den Spitzen des Vieleckes, so kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\sin aAB}{\sin aAF}:\frac{\sin OAB}{\sin OAF}\right)\left(\frac{\sin bBC}{\sin bBA}:\frac{\sin OBC}{\sin OBA}\right)\ldots\\ = \pm\left(\frac{a\alpha}{a\varphi}:\frac{O\alpha}{O\varphi}\right)\left(\frac{b\beta}{ba}:\frac{O\beta}{O\alpha}\right)\ldots;\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

denn die Faktoren $O\alpha, O\beta, \ldots$ im zweiten Theile heben sich gegenseitig auf, und dasselbe ist bei den in den ersten Theil eingeführten Sinussen der Fall, weil man hat:

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAF}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin OBA}\cdot\frac{\sin OCD}{\sin OCB}\ldots = \pm 1. \quad (\S.\ 230)$$

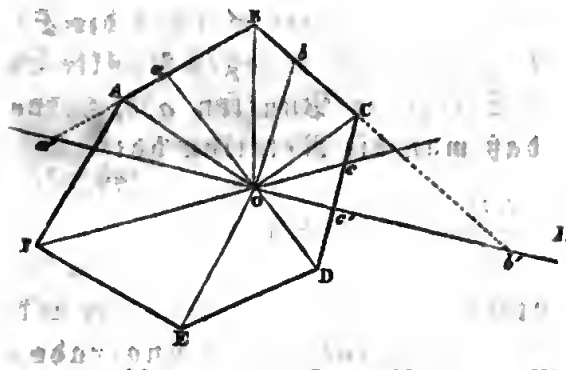
Nun sind aber die anharmonischen Verhältnisse im ersten Theile der Gleichung (α) resp. denen im zweiten Theile gleich; folglich findet diese Gleichung, und mithin auch die Gleichung (4) statt. —

Aus dem vorhergehenden Satze folgt: Die Anzahl der Segmente der Transversale, welche in den Winkeln des Vieleckes **selbst**, oder deren **Scheitel**winkeln und nicht in ihren Supplementen liegen, ist stets eine **gerade**. —

Denn wir wollen annehmen, daß die Geraden $Aa, Bb, \ldots$ alle in den Winkeln des Vieleckes selbst gezogen sind; so ist jedes Verhältniß wie $\frac{a\alpha}{a\varphi}$ negativ, wenn das Segment $\varphi\alpha$ in dem entsprechenden Winkel A selbst oder in dessen Scheitelwinkel liegt, und positiv, wenn es in dem Supplementwinkel liegt. —

Es braucht also nur bewiesen zu werden: daß die Zahl der negativen Verhältnisse von $\frac{a\alpha}{a\varphi}$, $\frac{b\beta}{b\alpha}$, ... immer eine gerade ist. — Wenn nun die Zahl der Winkel des Vieleckes eine gerade ist, so hat man in der Gleichung (4) das Zeichen + zu nehmen; aber alsdann ist ihr erster Theil positiv; mithin der zweite auch, und folglich die Zahl der negativen Verhältnisse gerade.

Wenn die Zahl der Winkel des Vieleckes ungerade ist, so ist der zweite Theil der Gleichung (4) mit dem Zeichen — zu nehmen; aber der erste Theil ist negativ; folglich das Produkt $\frac{a\alpha}{a\varphi} \cdot \frac{b\beta}{b\alpha} \ldots$ positiv, und endlich die Zahl der negativen Verhältnisse gerade. —



§. 233. Wenn man auf den Seiten eines Vieleckes $ABCD\ldots$ Punkte $a, b, c \ldots$ nimmt, und von einem Punkte O nach den Spitzen des Vieleckes und nach den Punkten $a, b, c, \ldots$ Gerade zieht; so hat man zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese Geraden bilden und den Segmenten, welche diese Punkte auf den Seiten des Vieleckes bestimmen, die Relation:

$$(a) \qquad \frac{\sin aOA}{\sin aOB} \cdot \frac{\sin bOB}{\sin bOC} \cdots = \frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdots$$

Denn zieht man durch den Punkt O eine feste Gerade OL, und bezeichnet die Punkte, wo sie die Seiten $AB, BC, \ldots$ des Vieleckes trifft, mit $a', b', \ldots$; so kann die obige Gleichheit wie folgt geschrieben werden:

$$(a') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sin aOA}{\sin aOB} : \frac{\sin LOA}{\sin LOB}\right)\left(\frac{\sin bOB}{\sin bOC} : \frac{\sin LOB}{\sin LOC}\right) \cdots \\ \qquad = \left(\frac{aA}{aB} : \frac{a'A}{a'B}\right)\left(\frac{bB}{bC} : \frac{b'B}{b'C}\right) \cdots \end{array} \right.$$

Denn alle in den ersten Theil eingeführten Sinus heben sich paarweise auf, und wegen der Relation:

$$\frac{a'A}{a'B} \cdot \frac{b'B}{b'C} \ldots = 1, \text{ (§. 229)}$$

heben sich auch alle in den zweiten Theil eingeführten Segmente gegenseitig auf. — Nun ist aber jedes anharmonische Verhältniß des ersten Theiles dem entsprechenden des zweiten Theiles gleich; folglich findet die Gleichheit (α'), und mithin auch die Gleichheit (α) statt. —

Wenn die Geraden $Oa, Ob \ldots$ die Halbirenden der Winkel $AOB, BOC, \ldots$ sind, so ist jedes der Verhältnisse $\frac{\sin aOA}{\sin aOB} = -1$, und man hat daher den Satz:

Die Halbirenden der Winkel, unter welchen die Seiten eines Vieleckes $ABC\ldots$ von einem festen Punkte aus erscheinen, treffen diese Seiten in Punkten $a, b, \ldots$ von solcher Beschaffenheit, daß man die Relation hat:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \ldots = \pm 1,$$

wo das **obere**, oder **untere** Zeichen gilt, jenachdem die Seitenzahl des Vieleckes eine **gerade**, oder **ungerade** ist.

Wenn die Geraden $Oa \ldots$ die Halbirenden der Supplemente der Winkel des Vieleckes sind, so ist der erste Theil der Gleichung (α) immer positiv, und man hat daher den Satz:

Die Halbirenden der Supplemente der Winkel, unter welchen die Seiten eines Vieleckes $ABC\ldots$ von demselben Punkte aus erscheinen, treffen diese Seiten in Punkten $a, b, \ldots$ von solcher Beschaffenheit, daß man hat:

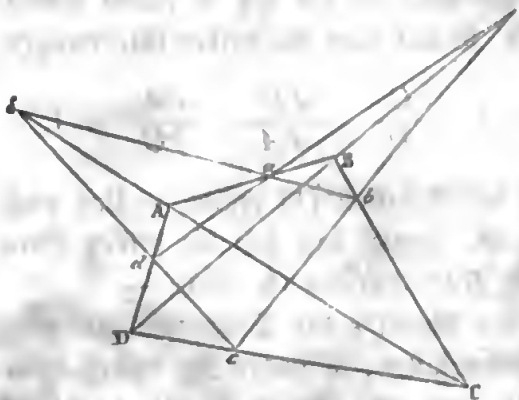
$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \ldots = 1.$$

Aus diesem Lehrsatze ergeben sich auch die in §. 226 durch andere Betrachtungen über das Dreieck bewiesenen Sätze. —

Eigenschaften des Viereckes.

§. 234. Die allgemeinen Eigenschaften des Vieleckes sind

offenbar auch auf das Viereck anwendbar; allein diese Figur bietet auch noch besondere Eigenschaften dar.



Wenn man auf den Seiten eines Viereckes *ABCD* vier Punkte *a, b, c, d* von solcher Beschaffenheit nimmt, daß die Relation:

$$(1)\quad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1$$

stattfindet, und man betrachtet diese vier Punkte als die successiven Spitzen eines zweiten Viereckes *abcd*; so liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten dieses letztern auf den beiden Diagonalen des erstern, —

Z. B. die beiden Gegenseiten *ab, cd* schneiden sich auf der Diagonale *AC*. Denn wenn sie die Diagonale in zwei verschiedenen Punkten $\varepsilon, \varepsilon'$ schnitten, so hätte man in den beiden Dreiecken *ABC*, *ADC* die Relationen:

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon' A}{\varepsilon' C}=1,$$

aus deren Multiplication unter Beachtung der Gleichung (1) folgt: $\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=\frac{\varepsilon' C}{\varepsilon' A}$, welches zeigt: daß die beiden Punkte $\varepsilon, \varepsilon'$ zusammenfallen. Folglich ꝛc.

§. 235. Umgekehrt: Wenn man durch einen Punkt ε der Diagonale *AC* eines Viereckes *ABCD* zwei beliebige Gerade zieht, wovon die eine die beiden Seiten *AB, BC* in *a, b* und die andere die beiden Seiten *CD, DA* in *c, d* schneidet; so hat man zwischen den Segmenten, welche die vier Punkte *a, b, c, d* auf den Seiten des Viereckes bestimmen, die Relation:

$$(1)\quad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1,$$

und mithin ſchneiden ſich die beiden Geraden da, cb auf der zweiten Diagonale BD. —

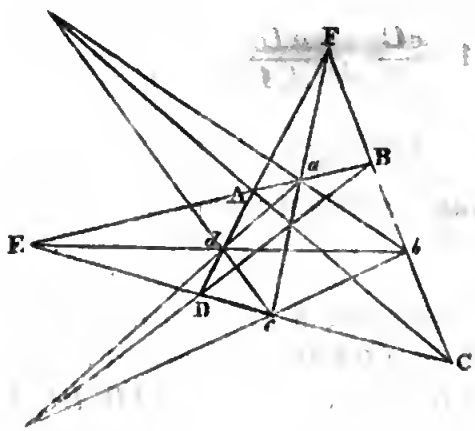
Denn wenn die beiden Geraden ab, cd ſich in einem Punkte ε der Diagonale AC ſchneiden, ſo hat man die beiden Gleichungen:

$$(\alpha)\quad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\ \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon A}{\varepsilon C}=1,$$

aus deren Multiplikation ſich die Relation (1) ergibt. — Und nachdem dieſe Gleichung bewieſen iſt, folgt: daß ſich die beiden Geraden ad, bc auf der Diagonale BD ſchneiden (§. 234). —

Wenn die beiden durch den Punkt ε der Diagonale AC gezogenen Geraden in eine zuſammenfallen, ſo finden die beiden Gleichungen (α) immer noch ſtatt, und die Gleichung (1) ergibt ſich daraus, wodurch der Satz in §. 229 für das Viereck direkt bewieſen wird, nämlich der Lehrſatz: Wenn eine Transverſale die vier Seiten des Viereckes $ABCD$ in vier Punkten a, b, c, d ſchneidet, ſo hat man die Relation:

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1.$$



§. 236. Wenn man durch die Durchſchnittspunkte der Gegenſeiten eines Viereckes $ABCD$ zwei Gerade zieht, welche dieſe Seiten reſp. in den Punkten a, c und b, d ſchneiden; ſo hat man zwiſchen den Segmenten, welche dieſe Punkte auf den vier Seiten des Viereckes beſtimmen, die Relation:

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1,$$

und folglich ſchneiden ſich die Gegenſeiten des Viereckes $abcd$, deſſen Spitzen dieſe Punkte ſind, auf den Diagonalen des Viereckes $ABCD$.

Denn das anharmonische Verhältniß der vier Punkte E, A, a, B ist dem der vier Punkte E, D, c, C gleich, so daß man hat:

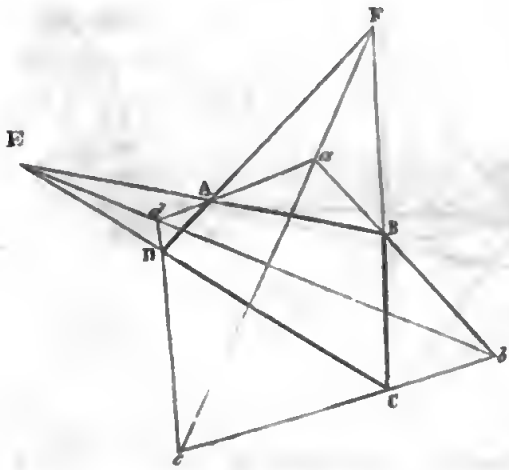
$$\frac{aA}{aB} : \frac{EA}{EB} = \frac{cD}{cC} : \frac{ED}{EC},$$

und ebenso:

$$\frac{bB}{bC} : \frac{FB}{FC} = \frac{dA}{dD} : \frac{FA}{FD}.$$

Aus diesen beiden Gleichheiten folgt durch Multiplikation:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \cdot \frac{dD}{dA} = \frac{EA.EC}{EB.ED} : \frac{FA.FC}{FB.FD}.$$



Der zweite Theil dieser Gleichheit ist aber nach §. 199, I der Einheit gleich; folglich auch der erste. — Folglich ꝛc.

§. 237. Wenn man durch die Spitzen des Viereckes $ABCD$ die Geraden aA, bB, cC, dD so zieht, daß die Relation stattfindet:

$$(2) \quad \frac{\sin aAD}{\sin aAB} \cdot \frac{\sin bBA}{\sin bBC} \cdot \frac{\sin cCB}{\sin cCD} \cdot \frac{\sin dDC}{\sin dDA} = 1,$$

so sind diese vier Geraden die successiven Seiten eines dem ersten Vierecke umschriebenen Vierecks, dessen Diagonalen durch die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des erstern gehen. —

Dieses folgt aus §. 231 und §. 234; denn da die Gleichung (2) nach der Voraussetzung stattfindet, so findet die Gleichung (1) in §. 234 auch statt, und mithin geht die Diagonale AC durch den Durchschnittspunkt der Gegenseiten ba, cd (§. 234.). —

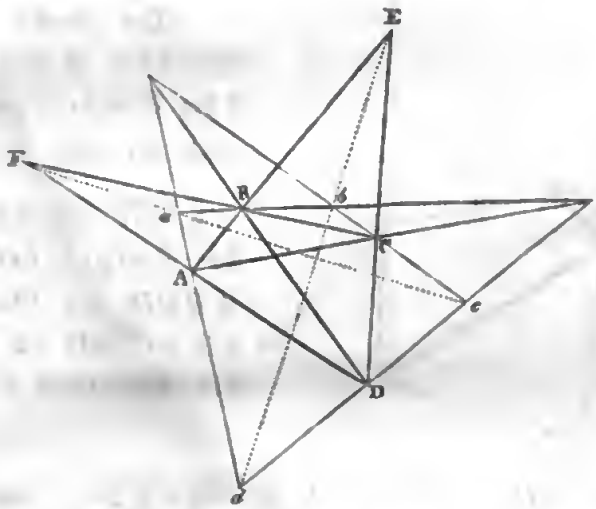
Man kann übrigens diesen Satz auch auf ähnliche Weise wie den in §. 234 direkt beweisen. —

§. 238. In jedem Viereck bilden die Halbirenden der

vier Winkel ein zweites Viereck, deſſen Diagonalen durch die Durſchnittspunkte der Gegenſeiten des erſten gehen. — Daſſelbe iſt der Fall, wenn das zweite Viereck von den Halbirenden der Supplemente der vier Winkel des erſten, oder von den Halbirenden zweier Winkel und den Halbirenden der Supplemente der beiden andern Winkel deſſelben gebildet wird.

Denn in jedem dieſer drei Fälle geben die betrachteten Halbirenden die Gleichung (2). —

§. 239. Wenn man durch die Spitzen eines Viereckes $ABCD$ vier Gerade Aa, Bb, Cc, Dd ſo zieht, daß die Durch-



ſchnittspunkte der Gegenſeiten des von dieſen Geraden gebildeten Viereckes $abcd$ auf den beiden Diagonalen des erſten Viereckes liegen; ſo hat man zwiſchen den Sinuſſen der Winkel, welche dieſe Geraden mit den Seiten des erſten Viereckes bilden, die Relation:

$$(\mu)\quad \frac{\sin a\,A\,D}{\sin a\,A\,B}\cdot\frac{\sin b\,B\,A}{\sin b\,B\,C}\cdot\frac{\sin c\,C\,B}{\sin c\,C\,D}\cdot\frac{\sin d\,D\,C}{\sin d\,D\,A}=1,$$

und folglich gehen die Diagonaien des zweiten Viereckes $abcd$ durch die Durchſchnittspunkte der Gegenſeiten des erſten $ABCD$. —

Denn die Diagonalen des Viereckes $ABCD$ gehen nach der

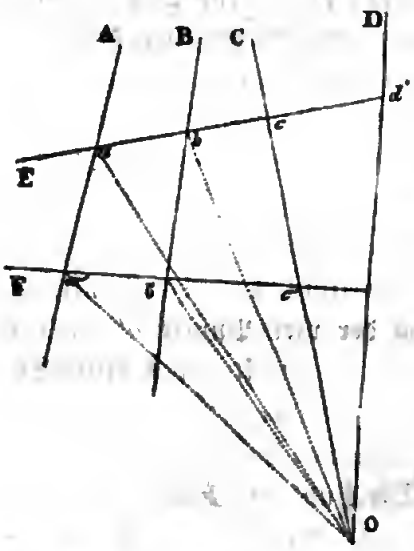
Voraussetzung durch die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Viereckes $abcd$; folglich hat man nach §. 236 die Relation:

$$\frac{Aa}{Ab} \cdot \frac{Bb}{Bc} \cdot \frac{Cc}{Cd} \cdot \frac{Dd}{Da} = 1,$$

und wenn man den Satz in §. 231 auf das Viereck anwendet; so hat man die Gleichung (μ), woraus alsdann nach dem vorhergehenden Lehrsatze folgt: daß die Diagonalen ac, bd des Viereckes $abcd$ durch die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Viereckes $ABCD$ gehen. —

Eigenschaften des Sechseckes.

§. 240. Wenn von sechs Geraden zwei von den vier andern homographisch getheilt werden, so ist dies auch mit irgend zwei andern der Fall. —



Es seien A, B, C, D, E, F die sechs Geraden, wovon die vier ersten die zwei letzten E, F homographisch, d. h. so theilen, daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d auf E dem der vier Punkte a', b', c', d' auf F gleich ist; so wird behauptet: daß z. B. auch die beiden Geraden A, B durch die vier andern C, D, E, F homographisch getheilt werden. — Denn es sei O der Durchschnittspunkt der beiden Geraden C, D, so ist, weil das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d dem der vier Punkte a', b', c', d' gleich ist, auch das der vier Geraden Oa, Ob, C, D dem der vier Geraden Oa', Ob', C, D gleich, so daß man die Gleichheit hat:

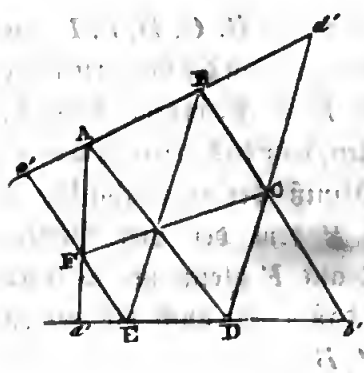
$$\frac{\sin(Oa,C)}{\sin(Oa,D)} : \frac{\sin(Ob,C)}{\sin(Ob,D)} = \frac{\sin(Oa',C)}{\sin(Oa',D)} : \frac{\sin(Ob',C)}{\sin(Ob',D)},$$

oder:

$$\frac{\sin(Oa,C)}{\sin(Oa,D)} : \frac{\sin(Oa',C)}{\sin(Oa',D)} = \frac{\sin(Ob,C)}{\sin(Ob,D)} : \frac{\sin(Ob',C)}{\sin(Ob',D)} .$$

Es ist also das anharmonische Verhältniß der vier Geraden Oa, Oa', C, D dem der vier Geraden Ob, Ob', C, D gleich; folglich ist auch das anharmonische Verhältniß der vier Durchschnittspunkte der ersten mit der Geraden A dem der Durchschnittspunkte der vier letzten mit der Geraden B gleich, und mithin sind die beiden Geraden A, B homographisch getheilt. — Hieraus folgt: daß auch eine der beiden Geraden E, F und eine der vier übrigen, z. B. E und D, homographisch getheilt werden, so daß der Satz vollständig bewiesen ist. —

§. 241. Wenn zwei Seiten eines Sechseckes von den vier andern homographisch getheilt werden, so gehen die drei Diagonalen, welche Gegenecken verbinden, durch denselben Punkt.

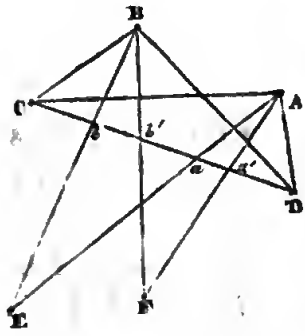


Es sei $ABCDEF$ das Sechseck, und AB, DE seien zwei Gegenseiten desselben, wovon die erste durch die beiden Seiten CD, EF in den Punkten d', e' und die zweite von den beiden Seiten BC, AF, in den Punkten b', a' geschnitten wird; so ist nach der Voraussetzung das anharmonische Verhältniß der vier Punkte A, B, d', e' dem der vier Punkte a', b', D, E oder E, D, b', a' gleich (§. 26). Die von zwei Punkten des ersten Systemes nach den in umgekehrter Folge genommenen beiden entsprechenden Punkten des letzten Systemes gezogenen Geraden schneiden sich folglich auf derselben Geraden (§. 72). Die Punkte C, F und der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen AD, BE sind Punkte dieser Geraden, und mithin schneiden sich diese beiden Diagonalen auf der dritten Diagonale CF, w. z. b. w. —

Umgekehrt: Wenn die drei Diagonalen, welche die Gegenecken eines Sechseckes verbinden, durch denselben Punkt gehen; so werden stets zwei Gegenseiten durch die vier übrigen homographisch getheilt. —

§. 242. Wenn sechs Punkte gegeben sind, und man

zieht von zwei derſelben durch die vier andern Strahlen, und die ſo gebildeten Büſchel ſind homographiſch; ſo iſt daſſelbe auch für jede zwei andere dieſer ſechs Punkte als Mittelpunkte zweier Büſchel, der Fall. —



Es ſeien *A, B, C, D, E, F* die ſechs Punkte, ſo ſind die beiden Büſchel, deren Mittelpunkte *E, F* ſind, und deren Strahlen durch die andern vier Punkte *A, B, C, D* gehen, nach der Vorausſetzung homographiſch, d. h. ſie haben gleiche anharmoniſche Verhältniſſe; und es wird behauptet: daß daſſelbe auch mit zwei Büſcheln der Fall iſt, deren Mittelpunkte z. B. *A, B* ſind, und deren Strahlen durch die andern vier Punkte *C, D, E, F* gehen.

Denn die Gerade *CD* ſchneidet die beiden erſten Büſchel, deren Mittelpunkte *E, F* ſind, in zwei Syſtemen von vier Punkten *a, b, C, D* und *a', b', C, D*, deren anharmoniſche Verhältniſſe gleich ſind, weil die beiden Büſchel homographiſch ſind. Man hat folglich:

$$\frac{aC}{aD} : \frac{bC}{bD} = \frac{a'C}{a'D} : \frac{b'C}{b'D},$$

oder:

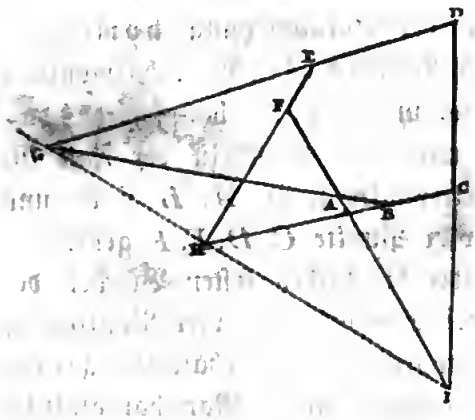
$$\frac{aC}{aD} : \frac{a'C}{a'D} = \frac{bC}{bD} : \frac{b'C}{b'D};$$

d. h. das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte *a, a', C, D* iſt dem der vier Punkte *b', b', C, D* gleich. Folglich hat das Büſchel, deſſen Mittelpunkt *A* iſt, und deſſen Strahlen durch die vier Punkte *a, a', C, D* gehen, daſſelbe anharmoniſche Verhältniß, als das Büſchel, deſſen Mittelpunkt *B* iſt, und deſſen Strahlen durch die vier Punkte *b, b', C, D* gehen; d. h. die vom Punkte *A* nach den vier Punkten *E, F, D, C* gehenden Strahlen haben daſſelbe anharmoniſche Verhältniß, als die von dem Punkte *B* durch dieſelben vier Punkte gehenden Strahlen.

Es iſt nun noch zu beweiſen: daß die beiden Büſchel, deren Mittelpunkte einer der beiden Punkte *E, F* und einer der vier Punkte *A, B, C, D*, z. B. *E* und *D* ſind, und deren Strahlen durch die vier

andern Punkte gehen, ebenfalls homographiſch ſind. Dieſes folgt aber daraus: daß die beiden Büſchel, deren Mittelpunkte A, B ſind, homographiſch ſind. Der Satz iſt alſo bewieſen. —

§. 243. Wenn in einem Sechseck die aus zwei Spitzen nach den vier andern gezogenen Strahlen zwei homographiſche Büſchel bilden, ſo liegen die Durchſchnittspunkte der Gegenſeiten in gerader Linie. —



Es ſei $ABCDEF$ das Sechseck, und G, H, J ſeien die Durchſchnittspunkte der drei Paare von Gegenſeiten AB, DE; BC, EF; CD, FA; ſo wird behauptet: daß dieſe drei Punkte unter der gemachten Vorausſetzung in gerader Linie liegen. —

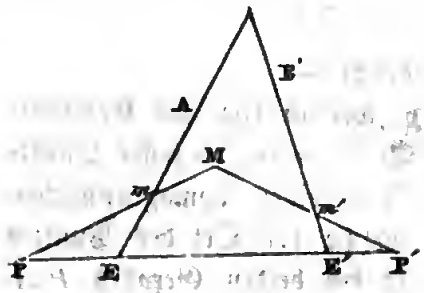
Denn die vier Geraden BA, BC, BD, BF haben z. B. nach der Vorausſetzung daſſelbe anharmoniſche Verhältniß, als die vier Geraden EA, EC, ED, EF, oder als EF, ED, EC, EA (§. 27). Folglich liegen die Durchſchnittspunkte von irgend zwei der vier erſten und den in umgekehrter Ordnung genommen zwei entſprechenden der vier letzten Geraden ſtets mit demſelben feſten Punkte in gerader Linie (§. 73). Nun ſind aber D, C, ſowie F, A und G, H drei Paare ſolcher Punkte; folglich gehen die drei Geraden DC, FA, GH durch denſelben Punkt; d. h. der Punkt J liegt mit G und H in gerader Linie; w. z. b. w.

Umgekehrt: Wenn die drei Durchſchnittspunkte der Gegenſeiten eines Sechseckes in gerader Linie liegen, ſo ſind die Büſchel, welche irgend zwei Ecken zu ihren Mittelpunkten haben, und deren Strahlen durch die vier andern Ecken des Sechseckes gehen, homographiſch. —

Gleichung einer Geraden.

§. 244. In §. 186 folgg. haben wir geſehen: daß die Punkte einer Geraden auf verſchiedene Weiſen mittelſt der Durchſchnitte

zweier, sich um zwei feste Punkte drehenden Strahlen bestimmt werden können, wenn diese Strahlen zwei homographische Büschel erzeugen, worin die Verbindungslinie der beiden festen Punkte ein gemeinschaftlicher Strahl ist (§. 68). — Wenn man nun die Homographie der beiden Büschel nicht, wie dort, durch geometrische Constructionen bestimmt, sondern durch eine Relation zwischen Segmenten, oder Winkeln ausdrückt; so bildet diese Relation eine Gleichung der Geraden, deren verschiedene Formen wir jetzt näher erörtern wollen. —



Wenn sich zwei Strahlen um zwei feste Pole P, P' drehen und zwei feste Axen EA, $E'B'$ in zwei Punkten m, m' von solcher Beschaffenheit schneiden, daß stets die Relation:

$$(a) \qquad \alpha \cdot \frac{Am}{Em} + \beta \cdot \frac{B'm'}{E'm'} = \nu$$

stattfindet, indem A, B' zwei **beliebige feste** Punkte auf $EA, E'B'$ und α, β, ν **constante** Coefficienten sind; so beschreibt der Durchschnittspunkt M der beiden Strahlen $Pm, P'm'$ eine Gerade. —

Denn die Gleichung (a) drückt aus: daß die beiden Punkte m, m' auf den beiden Axen $EA, E'B'$ zwei homographische Theilungen bilden, worin E, E' zwei homologe Punkte sind (§. 81); folglich erzeugen die beiden Strahlen $Pm, P'm$ zwei homographische Büschel, worin PP' ein gemeinschaftlicher Strahl ist — und mithin beschreibt der Durchschnittspunkt M von $Pm, P'm'$ eine Gerade (§. 69). —

Umgekehrt: Wenn eine Gerade gegeben ist, so kann man offenbar eine der drei Constanten α, β, ν immer beliebig annehmen und die beiden andern so bestimmen: daß die Gleichung (a) dieser Geraden entspricht. —

§. 245. Wenn einer der festen Punkte A, B' oder beide — oder einer der beiden festen Punkte E, E' oder beide in unendlicher Entfernung angenommen werden, so daß in dem letzten Falle

$EA, E'B'$ zu PP' parallel sind; so hat man nach §. 81 die folgenden vier Gleichungen:

$$\alpha \cdot \frac{Am}{Em} + \frac{\varepsilon}{E'm'} = \nu,$$

$$\frac{\alpha}{Em} + \frac{\varepsilon}{E'm'} = \nu,$$

$$\alpha \cdot \frac{Am}{Em} + \varepsilon \cdot B'm' = \nu,$$

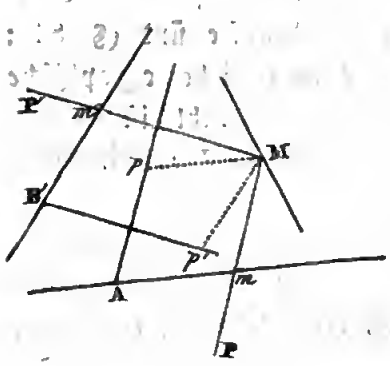
$$\alpha \cdot Am + \varepsilon \cdot B'm' = \nu,$$

wovon jede eine beliebige Gerade ausdrückt. —

Wenn in diesen Gleichungen, so wie in (a), die Constante $\nu = 0$ ist; so erhält man zweigliedrige Gleichungen, die festen Punkte A, B' sind zwei homologe Punkte der beiden homographischen Theilungen (§. 76) und die Gerade, welche der Ort des Punktes M ist, geht durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden PA, $P'B'$, selbst wenn die Punkte A, B' in unendlicher Entfernung liegen. —

§. 246. Wenn die Gerade $PEE'P'$ in unendliche Entfernung rückt, so werden die Geraden Pm unter sich parallel, so wie auch die Geraden $P'm'$ unter sich, aber in einer andern Richtung, parallel werden, und die Gleichung der Geraden wird:

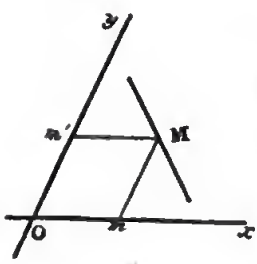
$$\alpha \cdot Am + \varepsilon \cdot B'm' = \nu.$$



Man hat also den Satz: Wenn man auf zwei festen Axen von zwei festen Punkten A, B' aus zwei veränderliche Segmente $Am, B'm'$ nimmt, welche durch die Gleichung des ersten Grades:

$$(b) \quad \alpha \cdot Am + \varepsilon \cdot B'm' = \nu$$

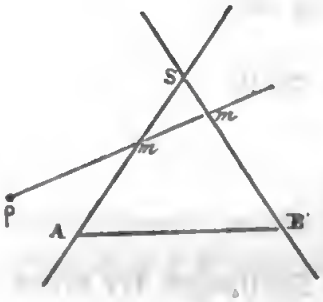
mit einander verbunden sind, und man zieht durch die Punkte m, m' Parallelen zu zwei andern festen Axen; so beschreibt der Durchschnittspunkt M dieser Parallelen eine gerade Linie. —



Wenn die beiden festen Punkte A, B' in dem Durchschnittspunkte O der beiden festen Axen zusammenfallen, und die Geraden Mm, Mm' resp. zu den Axen Om', Om parallel sind; so sind die Segmente Om, Om' genau die gewöhnlichen Coordinaten x, y der analytischen Geometrie, und die Gleichung der Geraden wird:

$$\alpha . x + \beta . y = \nu.$$

Gleichungen eines Punktes.



§. 247. Wenn man auf zwei, sich in einem Punkte S schneidenden festen Axen SA, SB, worauf A, B zwei feste Punkte sind, zwei veränderliche Punkte m, m' nimmt, welche durch die Relation:

$$\alpha . \frac{Am}{Sm} + \beta . \frac{Bm'}{Sm'} = \nu$$

mit einander verbunden sind, worin α, β, γ constante Coefficienten bedeuten; so geht die Gerade mm' stets durch denselben Punkt ϱ. —

Denn diese Gleichung drückt die homographische Theilung der beiden Geraden SA, SB aus, und es fallen in S zwei homologe Punkte zusammen (§. 81). Folglich geht die Gerade mm' stets durch denselben Punkt ϱ (§. 67).

Mann kann also sagen: daß die Gleichung (a) den Punkt ϱ ausdrückt — oder die Gleichung dieses Punktes ist — oder daß (a) eine Punktgleichung ist. —

Umgekehrt: Wenn ein Punkt ϱ gegeben ist, so kann man offenbar eine der drei Constanten α, β, ν beliebig annehmen und die beiden andern so bestimmen, daß die Gleichung (a) diesen Punkt ϱ ausdrückt. —

Jeder der drei Punkte S, A, B kann in unendlicher Entfernung angenommen werden (§. 81), wodurch man folgende Gleichungen erhält:

$$\frac{\alpha}{Sm} + \varepsilon \cdot \frac{Bm'}{Sm'} = \nu,$$

$$\frac{\alpha}{Sm} + \frac{\varepsilon}{Sm'} = \nu$$

$$\alpha \cdot Am + \varepsilon \cdot Bm' = \nu.$$

In der letzten Gleichung sind die beiden Axen SA, SB parallel. —

Wenn die Constante $\nu = 0$ ist, so liegt der durch jede dieser Gleichungen ausgedrückte Punkt stets auf der Geraden AB. Denn alsdann reducirt sich die allgemeinen Gleichung auf:

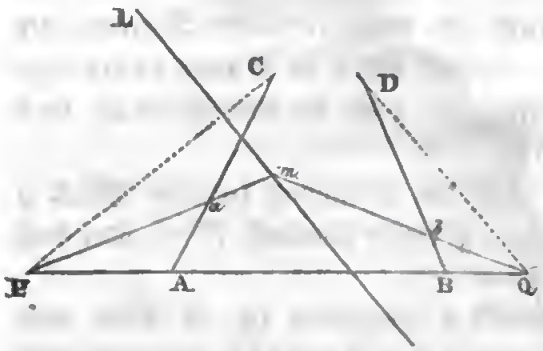
$$\alpha \cdot \frac{Am}{Sm} + \varepsilon \cdot \frac{Bm'}{Sm'} = 0$$

oder:

$$\frac{Am}{Sm} = \mu \cdot \frac{Bm'}{Sm'}.$$

und drückt aus: daß in den homographischen Theilungen der beiden Geraden SA, SB die Punkte A, B homologe sind (§. 66.) Die Gerade AB ist also eine der Lagen von mm', und mithin liegt der Punkt ϱ auf AB. —

§. 248. Nähere Untersuchung der Gleichung einer Geraden und eines Punktes. — Wenn AC, BD zwei feste Axen und P, Q zwei feste Punkte (Pole) sind, um welche sich zwei Strahlen drehen, deren Durchschnittspunkt m eine Gerade L beschreibt; so ist nach §. 244 die Gleichung



dieser Geraden:

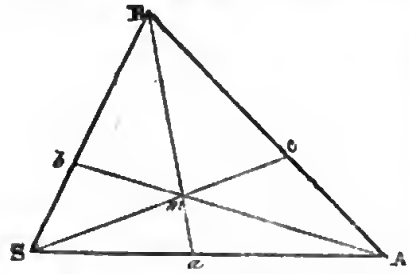
$$(1) \qquad \frac{aC}{aA} + \lambda \cdot \frac{bD}{bB} = \mu.$$

so daß jeder Punkt dieser Geraden durch die Verhältnisse $\frac{aC}{aA}$,

$\frac{bD}{bB}$ bestimmt wird, welche deshalb füglich die Coordinaten — Abscisse und Ordinate — desselben genannt werden können — und bezeichnet man sie resp. mit x, y; so wird die Gleichung der Geraden:

$$(1') \qquad x + \lambda y = \mu.$$

Wir wollen hier nur das Coordinatensystem näher betrachten, welches mit dem gewöhnlichen, in der analytischen Geometrie gebräuchlichen, die meiste Aehnlichkeit hat, indem wir die Pole P. Q resp. in die beiden Punkte A, B und die Punkte C, D in den Durchschnittspunkt S der beiden Axen fallen lassen, so daß die Verhältnisse $\frac{aS}{aA}$, $\frac{bS}{bB}$ der Segmente, welche die beiden Strahlen Bm, Am auf den beiden Axen SA, SB bestimmen, die Coordinaten des Punktes m sind. —



Wenn die beiden Punkte A, B in unendlicher Entfernung angenommen werden, so geht dieses Coordinatensystem offenbar in das gewöhnliche Descartes'sche über, weil die unendlichen Segmente aA, bB aus der Gleichung verschwinden. —

Zunächst ist, wenn A, B in endlicher Entfernung liegen:

$$\frac{x}{y} = \frac{aS}{aA} : \frac{bS}{bB} = -\frac{cB}{cA},$$

weil man nach §. 205 in dem Dreiecke ASB hat:

$$\frac{aS}{aA} \cdot \frac{bB}{bS} \cdot \frac{cA}{cB} = -1.$$

Ferner ist:

$$x + y = \frac{mS}{mC},$$

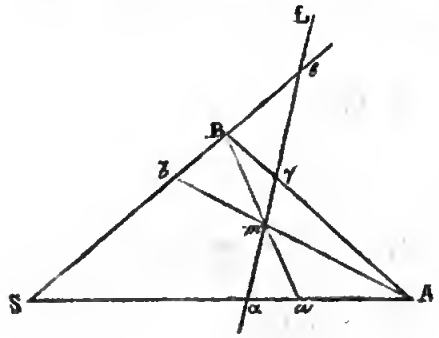
weil nach §. 199 in dem Viereck $aSBm$ ist:

$$\frac{Sa}{aA} + \frac{Sb}{bB} = \frac{Sm}{mC}.$$

Die Coordinaten jedes Punktes der Basis AB sind offenbar

unendlich, weil, wenn m auf AB fällt, $aA = 0$ und $bB = 0$ ist. —

Auch die Durchschnittspunkte α, ε und γ der durch die Gleichung (1) ausgedrückten Geraden L mit den Axen SA, SB und mit der Basis AB lassen sich leicht finden. Denn wenn der Punkt m mit a zusammenfällt, so fällt b in S, und es ist $y = \frac{bS}{bB} = 0$; folglich $x = \frac{aS}{aA} = \mu$, weil



$$\frac{aS}{aA} + \lambda \cdot \frac{bS}{bB} = \mu$$

ist. — Für den Punkt ε auf der Axe SB ist $x = 0$, also $y = \frac{\varepsilon S}{\varepsilon B} = \frac{\mu}{\lambda}$. Für den Punkt γ endlich gibt das von der Transversale $a\varepsilon$ durchschnittene Dreieck ASB nach §. 201:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{aA}{aS} \cdot \frac{\varepsilon S}{\varepsilon B} = \frac{1}{\lambda}.$$

Hieraus erhellet die geometrische Bedeutung der beiden in der Gleichung (1′) vorkommenden Constanten λ, μ, so wie: daß umgekehrt durch zwei der drei Punkte $\alpha, \varepsilon, \gamma$ die beiden in der Gleichung einer Geraden vorkommenden Coefficienten bestimmt werden. —

§. 249. Vermittelst der obigen geometrischen Ausdrücke von λ, μ findet man nun leicht, daß:

1) $\mu = 0,\ x + \lambda y = 0$

eine durch den Anfangspunkt S gehende Gerade,

2) $\lambda = 0,\ x = \mu$

eine durch den Pol B gehende Gerade,

3) $\lambda = \infty,\ y = const.$

eine durch den Pol A gehende Gerade,

4) $\lambda = 1,\ x + y = \mu$

eine zu der Baſis AB parallele Gerade,

5) $\mu = 1,\ x + \lambda y = 1$

eine zu der Axe der x oder zu SA parallele Gerade,

6) $\frac{\mu}{\lambda} = 1,\ \frac{x}{\lambda} + y = 1$

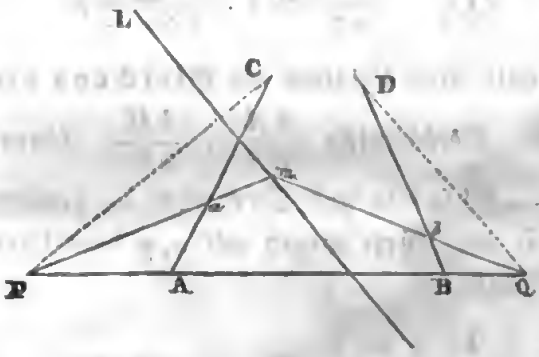
eine zu der Axe der y oder zu SB parallele Gerade und

7) $\lambda = 1,\ \mu = 1,\ x + y = 1$

eine unendlich entfernte Gerade ausdrückt, weil im letzten Falle $x + y = \frac{mS}{mC} = 1$ iſt (§. 248), alſo der Punkt m in unendlicher Entfernung liegt. —

§. 250. Statt der Gleichung (1) kann man auch folgende nehmen:

(2) $$\frac{\sin aPC}{\sin aPA} + \lambda \cdot \frac{\sin bQD}{\sin bQB} = \mu,$$



welche ausdrückt: daß die beiden ſich drehenden Strahlen Pa, Qb zwei homographiſche Büſchel erzeugen (§. 94), ſo daß man dieſe Gleichung als die einer Geraden und die beiden Sinusverhältniſſe als die Coordinaten irgend eines Punktes m derſelben betrachten kann. —

Wenn p, p', q reſp. die Abſtände des Punktes m von den drei Geraden PC, QD, PQ bezeichnen, ſo kann man ſtatt der Gleichung (2) auch die folgende:

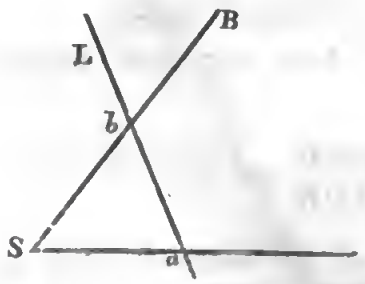
$$\frac{p}{q} + \lambda \cdot \frac{p'}{q} = \mu$$

oder:

$$(3) \qquad p + \lambda \,.\, p' = \mu\, q$$

nehmen, weil sich die Perpendikel p, p', q offenbar wie die Sinus der entsprechenden Winkel verhalten, so daß eine Gerade durch eine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den Abständen jedes Punktes m derselben von drei festen Aren ausgedrückt wird — und die Verhältnisse $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q}$ als die Coordinaten des Punktes m betrachtet werden können. —

Wenn die dritte Are PQ, auf welche sich q bezieht, in unendliche Entfernung rückt; so verschwindet q aus der Gleichung (3), wie wenn $q = 1$ wäre, und man kommt alsdann auf das gewöhnliche System paralleler Coordinaten. —

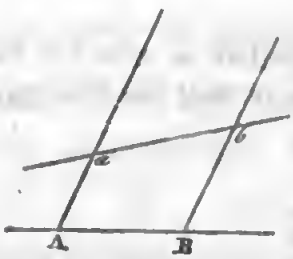


§. 251. Nach §. 247 wird die Lage einer, stets durch denselben Punkt gehenden Geraden L gegen zwei feste Aren SA, SB durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{aA}{aS} + \lambda \,.\, \frac{bB}{bS} = \mu$$

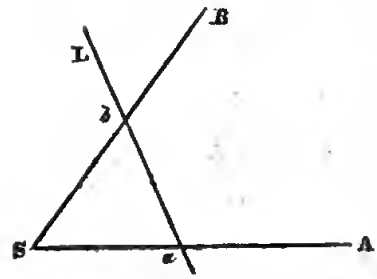
bestimmt, und es wurde deshalb diese Relation die Gleichung dieses Punktes genannt. Die Verhältnisse $\frac{aA}{aS}$, $\frac{bB}{bS}$ können füglich die Coordinaten — Abscisse und Ordinate — genannt werden — und wenn man sie der Kürze wegen mit x, y bezeichnet; so wird die Gleichung des Punktes:

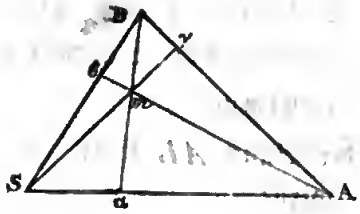
$$(1') \qquad x + \lambda \,.\, y = \mu.$$



Wenn man in diesem Coordinatensysteme den Punkt S in unendliche Entfernung rücken läßt, so werden die beiden Aren AS, BS parallel, und die beiden Coordinaten einer Geraden ab sind zwei bloße Segmente $x = Aa$, $y = Bb$.

Wenn dagegen der Punkt S in endlicher Entfernung bleibt, und die beiden Punkte A, B in unendliche Entfernung rücken, so ist $x = \frac{1}{Sa}$, $y = \frac{1}{Sb}$; d. h. die Coordinaten einer Geraden L oder $a\,b$ sind die reciproken Werthe der Segmente, welche sie auf den beiden festen Axen bestimmt.





Wenn keiner der drei Punkte S, A, B in unendlicher Entfernung liegt, so ist die Gleichung eines Punktes m:

$$x + \lambda y = \mu$$

oder:

$$\frac{aA}{aS} + \lambda \cdot \frac{bB}{bS} = \mu,$$

und um den Punkt α zu bestimmen, wo die Gerade Bm die Axe SA trifft, muß man in dieser Gleichung $y = 0$ oder $\frac{bB}{bS} = 0$ setzen, wodurch man erhält:

$$x = \frac{aA}{aS} = \mu.$$

Ebenso ergibt sich, wenn man $x = \frac{aA}{aS} = 0$ setzt, für den Durchschnittspunkt ϵ der Geraden Am mit der Axe SB:

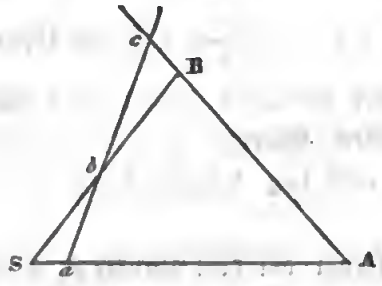
$$y = \frac{\epsilon B}{\epsilon S} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Und für den Punkt γ, wo die Gerade Sm die Basis AB schneidet, hat man:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = -\frac{\alpha A}{\alpha S} \cdot \frac{\epsilon S}{\epsilon B} = -\mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} = -\lambda.$$

Die in der Gleichung (1) oder (1') eines Punktes vorkommenden beiden Constanten λ, μ bestimmen also resp. die von diesem Punkte nach dem Anfangspunkte S und nach dem Punkte B gezogenen Geraden,

und ihr Verhältniß $\frac{\mu}{\lambda}$ bestimmt die von demselben Punkte nach dem Punkte A gehende Gerade. —



Ferner hat man:

$$\frac{x}{y} = \frac{aA}{aS} : \frac{bB}{bS} = \frac{cA}{cB};$$

d. h. das Verhältniß der Coordinaten einer Geraden ist gleich dem Verhältnisse der Segmente, welche diese Gerade auf der Basis bestimmt.

§. 252. Wenn der Punkt m auf der Basis AB liegt, so ist $\mu = 0$, und die Gleichung des Punktes wird:

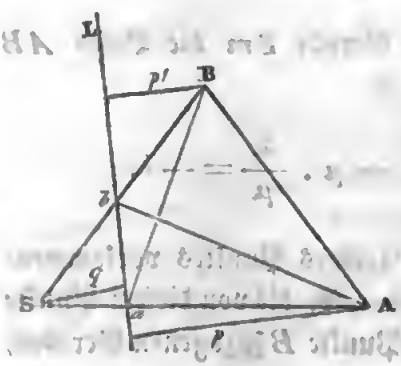
$$x + \lambda y = 0.$$

Denn die Gerade Bm trifft die Axe SA in einem Punkte a, für welchen $x = \frac{aA}{aS} = \mu = 0$ ist — und die Lage des Punktes m wird durch das Verhältniß $\frac{mA}{mB} = -\lambda$ bestimmt. —

Wenn der Punkt m auf der Axe SA liegt, so ist $\lambda = 0$, und die Gleichung des Punktes wird: $x = \mu$; denn alsdann ist $\frac{\mathfrak{S}B}{\mathfrak{S}S} = \frac{\mu}{\lambda} = \infty$, also $\lambda = 0$.

Endlich sind die Coordinaten jeder durch den Anfangspunkt S gehenden Geraden unendlich, weil für eine solche Gerade $aS = 0$, $bS = 0$; also $x = \frac{aA}{aS} = \infty$, $y = \frac{bB}{bS} = \infty$ ist. —

§. 253. Die Punktgleichung (1) drückt aus: daß die bewegliche Gerade L oder ab auf den beiden Axen SA, SB zwei homographische Theilungen bestimmt, wovon zwei homologe Punkte in S zusammenfallen — und da dasselbe nach §. 95 auch durch die Gleichung:



$$\frac{\sin aBA}{\sin aBS} + \lambda \cdot \frac{\sin bAB}{\sin bAS} = \mu$$

ausgedrückt wird; so kann man diese letzte

Relation auch als Punktgleichung nehmen, und die Sinusverhältnisse als die Coordinaten x, y betrachten, so daß die Gleichung wieder wird:

$$x + \lambda y = \mu.$$

Sind ferner p, p', q resp. die von den Punkten A, B, S auf die Gerade L gefällten Perpendikel, so ist offenbar:

$$\frac{aA}{aS} = \frac{p}{q}, \quad \frac{bB}{bS} = \frac{p'}{q},$$

und die Gleichung (1) wird:

$$\frac{p}{q} + \lambda \cdot \frac{p'}{q} = \mu$$

oder:

$$p + \lambda \cdot p' = \mu \cdot q,$$

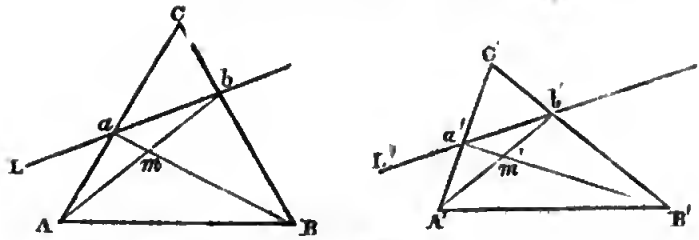
so daß also ein Punkt durch eine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den Abständen derselben Geraden von drei festen Punkten ausgedrückt wird — und die Verhältnisse $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}$ als Coordinaten betrachtet werden können. —

Theorie der homographischen (collinearen) Figuren.

§. 254. Zwei Figuren heißen homographisch (collinear), wenn den Punkten und Geraden in der einen wieder Punkte und Gerade in der andern entsprechen — und zwar so: daß das anharmonische Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten, oder von vier durch denselben Punkt gehenden Geraden in der ersten Figur dem der vier entsprechenden Punkte, oder Geraden in der zweiten gleich ist. —

Zwei ebene Figuren, wovon die eine durch perspectivische Projection der andern gebildet ist, sind offenbar zwei homographische Figuren, weil sie den in der vorhergehenden Definition ausgesprochenen Bedingungen entsprechen (§. 13[a]).

§. 255. Allgemeine Construction homographischer Figuren. — Es sei ABC ein Dreieck in der Ebene einer



Figur. Wenn man von den Spitzen A, B dieſes Dreieckes nach jedem Punkte m der Figur zwei Gerade zieht, welche auf den Gegenſeiten zwei Segmentenverhältniſſe $\frac{bC}{bB}$, $\frac{aC}{aA}$ beſtimmen — und man nimmt ein zweites **beliebiges** Dreieck $A'B'C'$ an, und beſtimmt einen Punkt m' ſo, daß man die Gleichheiten hat:

$$(a) \qquad \frac{aC}{aA} = \lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'}, \quad \frac{bC}{bB} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'};$$

ſo gehört der Punkt m' einer zu der erſten **homographiſchen** oder **collinearen** Figur an; d. h.: 1) wenn die Punkte m in der erſten Figur in gerader Linie liegen, ſo liegen die Punkte m' in der zweiten auch in gerader Linie; 2) wenn Gerade L in der erſten Figur durch denſelben Punkt gehen, ſo gehen die entſprechenden Geraden L' der zweiten ihrerſeits auch durch ein und denſelben Punkt; 3) es iſt das anharmoniſche Verhältniß ſolcher vier Punkte, oder Geraden in der zweiten Figur dem der entſprechenden vier Punkte, oder Geraden in der erſten gleich. —

1) Denn da der Punkt m eine Gerade beſchreibt, ſo hat man nach §. 244 zwiſchen den Verhältniſſen $\frac{aC}{aA}$, $\frac{bC}{bB}$ eine Gleichung des erſten Grades; folglich hat man wegen der Gleichungen (a) auch zwiſchen den Verhältniſſen $\frac{a'C'}{a'A'}$, $\frac{b'C'}{b'B'}$ eine Gleichung des erſten Grades, und mithin beſchreibt der Punkt m' auch eine Gerade. —

2) Denn jede der Geraden in der zweiten Figur geht durch den entſprechenden Punkt des Durchſchnittspunktes der entſprechenden Geraden der erſten Figur. —

3) Denn das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte m iſt

dem der vier Punkte a gleich — und das der vier Punkte m' ist gleich dem der vier Punkte a'; aber wegen der Gleichung (a) ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a' dem der vier Punkte a gleich (§. 75); also ist das der vier Punkte m' auch dem der vier Punkte m' gleich. — Ferner ist das anharmonische Verhältniß der durch denselben Punkt gehenden vier Geraden L dem der vier Punkte a gleich; also nach dem eben Bewiesenen auch gleich dem der vier Punkte a', und endlich auch gleich dem der vier Geraden L', weil diese durch denselben Punkt und durch die vier Punkte a' gehen. — W. b. w. s.

§. 256. Den in unendlicher Entfernung liegenden Punkten der ersten Figur entsprechen in gerader Linie liegende Punkte der zweiten homographischen Figur. — Denn wenn sich der Punkt m ins Unendliche entfernt, so hat man nach §. 149, Gl. 7 zwischen den durch die beiden parallelen Strahlen Am, Bm auf den beiden Gegenseiten BC, AC bestimmten Segmentenverhältnissen $\frac{bC}{bB}, \frac{aC}{aA}$ die Gleichung des ersten Grades:

$$\frac{aC}{aA} + \frac{bC}{bB} = 1,$$

und folglich ist der geometrische Ort des entsprechenden Punktes m' der zweiten Figur, wegen der Relationen (a), die durch die Gleichung:

$$\lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'} + \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'} = 1$$

ausgedrückte Gerade. — W. z. b. w.

Wenn J die Gerade bezeichnet, welche in der ersten Figur den unendlich entfernten Punkten der zweiten Figur entspricht — und J' die Gerade der zweiten Figur, welche den unendlich entfernten Punkten der ersten entspricht; so folgt: daß zwei parallelen Geraden in der zweiten Figur in der ersten Figur zwei sich auf der Geraden J schneidende Gerade entsprechen — und umgekehrt. —

Ferner folgt hieraus: daß der auf der Geraden J' in unendlicher Entfernung liegende Punkt den auf der Geraden J ebenfalls in unendlicher Entfernung liegenden Punkt zum homologen

hat. — Denn der erste Punkt ist der Durchschnitt von J' mit der unendlich entfernten Geraden in der zweiten Figur — und folglich ist sein homologer in der ersten Figur der Durchschnitt der beiden entsprechenden Geraden, nämlich der unendlich entfernten und J,; er liegt also auf J in unendlicher Entfernung. —

Hieraus folgt weiter: eine Parallele zu J in der ersten Figur hat in der zweiten eine Parallele zu J' zur homologen Geraden. — Diese beiden Parallelen haben die Eigenthümlichkeit: daß sie von ihren homologen Punkten ähnlich oder proportional getheilt werden, weil ihre unendlich entfernte Punkte zwei homologe Punkte sind (§. 77) — und später werden wir sehen: daß es immer zwei Paare homologer Geraden gibt, welche durch ihre homologen Punkte in gleiche Theile getheilt werden. —

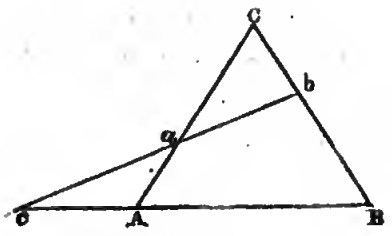
§. 257. Jedes in den Relationen (a) vorkommende Verhältniß bestimmt die Lage einer von einem der festen Punkte A, B; A', B' ausgehenden Geraden; z. B. das Verhältniß $\frac{bC}{bB}$ bestimmt die Richtung der Geraden Am, welche auch durch das Verhältniß $\frac{\sin mAC}{\sin mAB}$ bestimmt wird, so daß man statt der Relation:

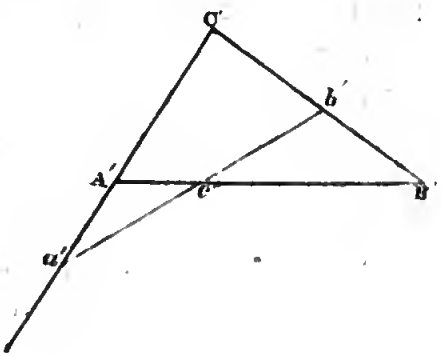
$$\frac{bC}{bB} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'}$$

folgende:

$$\frac{\sin bAC}{\sin bAB} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'}$$

nehmen kann. — Dasselbe gilt von den übrigen Verhältnissen — so daß man jetzt auch eine der Geraden CA, CB, oder $C'A'$, $C'B'$





in unendlicher Entfernung annehmen kann. — Die Gleichungen (*a*) sind unverändert auch auf den Fall anwendbar, wo eine der Basen $AB.A'B'$, oder beide, so wie auf den Fall, wo eine der Spitzen jedes der beiden Dreiecke $ABC, A'B'C'$ in unendlicher Entfernung liegen. — Aber sie sind auf zwei auf den Basen $AB, A'B'$ liegende, entsprechende Punkte c, c' nicht ohne Weiteres anwendbar; jedoch kann man die solchen Punkten entsprechende Relation:

$$(b) \qquad \frac{cA}{cB} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{c'A'}{c'B'}$$

leicht finden. Denn zieht man durch die Punkte c, c' irgend zwei homologe Gerade $ca, c'a'$, so hat man in den beiden Dreiecken die Relationen:

$$\frac{cA}{cB} \cdot \frac{aC}{aA} \cdot \frac{bB}{bC} = 1, \quad \frac{c'A'}{c'B'} \cdot \frac{a'C'}{a'A'} \cdot \frac{b'B'}{b'C'} = 1,$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Gleichungen (*a*) sofort die gesuchte Gleichung (*b*) ergibt. —

§. 258. Nachdem man die drei Punkte A', B', C' der zweiten Figur als entsprechende der drei Punkte A, B, C der ersten willkürlich angenommen hat, kann man auch noch einen vierten Punkt D' der zweiten Figur als entsprechenden eines Punktes D der ersten beliebig annehmen — und die Lage dieses vierten Punktes D' bestimmt die Werthe der beiden Constanten λ, μ mittelst der Relationen:

$$\frac{aC}{aA} = \lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'}, \quad \frac{bC}{bB} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'}.$$

Um also zu einer gegebenen Figur eine homographische zu bilden, kann man die vier bestimmten Punkten der ersten entsprechenden vier Punkte der zweiten beliebig annehmen; jedoch dürfen von den vier gegebenen Punkten nicht drei in gerader Linie liegen. — Denn wenn z. B. die Punkte D, D' auf den Geraden $AC, A'C'$ lägen, so würde blos die eine Constante λ mittelst der Relation:

$$\frac{DC}{DA} = \lambda \cdot \frac{D'C'}{D'A'}$$

bestimmt, und die andere Constante μ bliebe unbestimmt. —

Man kann in der zweiten Figur drei Punkte A', B', C und eine Gerade L', oder vier Gerade L' als entsprechende von A, B, C und L, oder von vier Geraden L der ersten Figur beliebig annehmen; aber nicht zwei Punkte A', B' und zwei Gerade L', M' als entsprechende von zwei Punkten A, B und zwei Geraden L, M. — Denn die beiden Geraden L, M schneiden die Gerade AB in zwei Punkten E, F und die beiden Geraden L', M' treffen die Gerade $A'B'$ in zwei homologen Punkten E', F', so daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte A', B', E', F', dem der vier Punkte A, B, E, F gleich sein müßte, was nicht immer der Fall sein kann, wenn $A', B'; L, M'$ willkürlich angenommen werden — und wenn es der Fall wäre; so würde es doch nur so viel bedeuten, als wenn man vier Punkte angenommen hätte, wovon drei in gerader Linie liegen, nämlich den Durchschnittspunkt der beiden Geraden L', M' und die drei Punkte A', B', E', was, wie man eben gesehen hat, ungenügend ist. —

§. 259. Metrische oder Größenrelationen homographischer Figuren. — Diese Relationen ergeben sich aus der Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier entsprechenden Punkten, oder von vier entsprechenden Geraden. — Zunächst folgt aus dieser Gleichheit:

1, Daß zwei entsprechende Gerade beider Figuren durch ihre entsprechenden Punkte homographisch getheilt werden;

2, daß zwei entsprechende Büschel in beiden Figuren homographisch sind. —

Wenn also in der ersten Figur a, b zwei feste Punkte und m ein veränderlicher Punkt auf derselben Geraden, so wie a', b' und m' in der zweiten Figur die entsprechenden Punkte sind: so hat man die Relation:

$$(1) \qquad \frac{am}{bm} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'},$$

worin λ eine Constante ist, welche nur von der Lage der beiden festen Punkte a, b abhängt (§. 75). Es ist also das Verhältniß $\frac{am}{bm} : \frac{a'm'}{b'm'}$ constant.

Nach §. 78 kann jeder der festen Punkte $a, b; a', b'$ in unendlicher Entfernung angenommen werden. Geschieht dieses mit b, so hat man:

$$am = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'},$$

und wenn auch a' unendlich entfernt ist; so erhält man $am = \frac{\lambda}{b'm'}$; also:

$$Jm \cdot J'm' = \lambda, \text{ (§. 79)}$$

welche Gleichung sich leicht in Worten ausdrücken läßt. —

§. 260. Zieht man durch die Punkte m, m' zwei homologe Gerade L, L' und bezeichnen $p, q; p', q'$ resp. die Abstände der festen Punkte $a, b; a', b'$ von diesen Geraden; so ist offenbar:

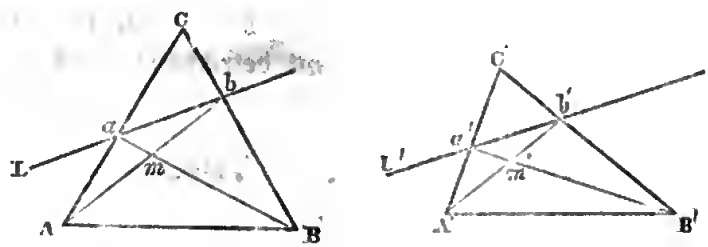
$$\frac{am}{bm} = \frac{p}{q}, \quad \frac{a'm'}{b'm'} = \frac{p'}{q'},$$

folglich wegen (1):

$$(1') \qquad \frac{p}{q} = \lambda \cdot \frac{p'}{q'},$$

und der in dieser Gleichheit liegende Satz kann ebenfalls leicht in Worten ausgesprochen werden. —

§. 261. Wenn man durch den Durchschnittspunkt C der beiden



festen Geraden AC, BC eine sich um C drehende Gerade M, und durch den Durchschnitt C'' der beiden entsprechenden festen Geraden $A'C', B'C'$ die sich um C' drehende homologe Gerade M' in der zweiten Figur zieht; so erzeugen M und M' zwei homographische Büschel (§. 259), und man hat mithin die Relation:

$$(2) \qquad \frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda \cdot \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')},$$

wo λ eine Conſtante iſt, welche nur von der Lage der beiden feſten Geraden A, B abhängt (§. 92).

Sind ferner p, q reſp. die Abſtände eines Punktes m der Geraden M von den beiden feſten Geraden A, B und p', q' die des homologen Punktes m' der Geraden M' von A', B'; ſo iſt offenbar:

$$\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \frac{p}{q}, \quad \frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')} = \frac{p'}{q'},$$

und folglich hat man wegen (1) die Relation:

$$(3) \qquad \frac{p}{q} = \lambda \cdot \frac{p'}{q'}.$$

Der durch dieſe Gleichung ausgedrückte Satz läßt ſich ebenfalls leicht in Worten ausſprechen. —

Jede der vier Geraden kann in unendlicher Entfernung liegen. Iſt dieſes z. B. mit B der Fall, ſo wird die Gleichung (3):

$$(4) \qquad p = \lambda \cdot \frac{p'}{p'},$$

Denn in dieſem Falle wird die Homographie der von den beiden Geraden M, M' erzeugten Büſchel nach §. 98 ausgedrückt durch:

$$am = \lambda \cdot \frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')},$$

wo am das auf einer feſten Transverſale zwiſchen den beiden Geraden A, M liegende Segment iſt — und wenn man wieder auf M, M' zwei homologe Punkte m, m' betrachtet; ſo iſt der Abſtand p des Punktes m von der Geraden A dem Segmente am proportional, und das Verhältniß $\frac{p'}{q'}$ der Abſtände des Punktes m' von A', B' iſt wieder $= \frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')}$. —

Die in der Gleichheit (4) ausgedrückte Eigenſchaft zweier homographiſcher Figuren kann auch leicht in Worten ausgeſprochen werden. —

Wird auch die Gerade A' in unendlicher Entfernung angenommen, ſo geht die Gleichung (4) in folgende über:

$$(5) \qquad p = \frac{\lambda}{q'}, \text{ oder } p \cdot q' = \lambda.$$

Denn in diesem Falle erzeugen die Geraden M, M' zwei Büschel, deren Strahlen resp. zu A und B' parallel sind, und die Homographie dieser beiden Büschel wird durch die der beiden Punktereihen ausgedrückt, welche ihre Strahlen auf zwei beliebigen festen Transversalen bestimmen, d. h.: durch die Gleichung:

$$(5') \qquad am = \frac{\lambda}{b'm'} \text{ . oder } am \,.\, b'm' = \lambda,$$

wo am und $b'm'$ die auf diesen Transversalen resp. zwischen den Geraden A, M und zwischen B', M' liegenden Segmente sind, weil a und b' die Punkte sind, welche in den beiden Theilungen den unendlich entfernten Punkten entsprechen. — Und wenn m, m' wieder zwei homologe Punkte der Geraden M, M' sind, so sind ihre Abstände p, q' von A und B' resp. den Segmenten $am, b'm'$ proportional, so daß die Gleichheit (5') in (5) übergeht. —

Die durch die Gleichung (5) ausgedrückte Eigenschaft zweier homographischer Figuren kann leicht in Worten ausgedrückt werden.—

§. 262. Nach dem in der Gleichung (3) liegenden Satze kann man auch folgende, ebenso einfache, als präcise Definition zweier homographischer Figuren geben:

Zwei homographische Figuren sind solche, deren Punkte sich paarweise so entsprechen, daß die Verhältnisse der Abstände jedes Punktes der ersten Figur von drei festen Geraden zu den Verhältnissen der Abstände des entsprechenden Punktes der zweiten Figur von drei andern festen Geraden in constanten Verhältnissen stehen.

Nach der Gleichung (1') kann man auch sagen:

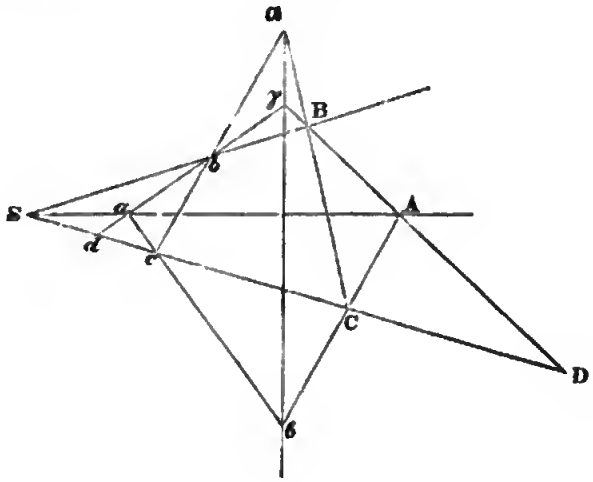
Zwei Figuren sind homographisch, wenn die Geraden in der einen Figur denen in der andern so entsprechen, daß die Verhältnisse der Abstände jeder Geraden der ersten Figur von drei festen Punkten zu den Verhältnissen der Abstände der entsprechenden Geraden in der zweiten Figur von drei andern festen Punkten in constanten Verhältnissen stehen. —

Aus jeder dieser beiden Definitionen lassen sich die Relationen (a), sowie alle Eigenthümlichkeiten homographischer Figuren leicht ableiten. —

Homologiſche Figuren.

§. 263. Was in §. 212 von zwei Dreiecken geſagt iſt, läßt ſich auch auf zwei Figuren überhaupt ausdehnen, ſo daß zwei homologiſche Figuren ſolche ſind, deren homologe Punkte auf Geraden liegen, die durch denſelben Punkt, den Mittelpunkt der Homologie, gehen, und deren homologe Linien ſich auf derſelben Geraden, der Axe der Homologie, ſchneiden. — Wenn von zwei Figuren $ABC\ldots, abc\ldots$ die eine die proſpektiviſche Projektion der andern iſt, ſo gehen die Verbindungslinien ihrer homologen Punkte durch denſelben Punkt, welcher die Lage des Auges iſt, und ihre homologen Linien ſchneiden ſich auf der Durchſchnittslinie der Ebenen der beiden Figuren. Läßt man nun die Ebene der zweiten Figur ſich um dieſe Durchſchnittslinie drehen, ſo drehen ſich die Geraden $ab, bc, cd, \ldots$ um feſte Punkte dieſer Linie, und wenn die Ebene der zweiten Figur auf die der erſten fällt; ſo gehen die Verbindungslinien $Aa, Bb, Cc, \ldots$ noch durch denſelben Punkt, weil ſich die Geraden AB und ab, BC und bc, u. ſ. f. reſp. in Punkten ſchneiden, die in derſelben Geraden, der Durchſchnittslinie der beiden Ebenen, liegen, und die beiden Figuren ſind alsdann zwei in derſelben Ebene liegende homologiſche Figuren. —

§. 264. Conſtruction homologiſcher Figuren. — Wenn der Mittelpunkt und die Axe der Homologie gegeben ſind, ſo braucht man, um zu einer gegebenen Figur $ABC\ldots$ die homolo-



gische $abc\ldots$ zu construiren, nur den Punkt a zu kennen, welcher einem Punkte A der gegebenen Figur entspricht. Denn der einem beliebigen andern Punkte B entsprechende Punkt b ist der Durchschnittspunkt der Geraden SB mit der Geraden, welche von dem Punkte a nach dem Punkte γ gezogen ist, wo die Gerade AB die Axe der Homologie trifft. — Man kann also durch bloße Durchschnitte von Geraden alle Punkte der homologischen Figur $abc\ldots$ einer gegebenen Figur $ABC\ldots$ finden, wenn nur ein einziger Punkt a derselben gegeben ist. — Die correspondirende Gerade einer gegebenen Geraden wird durch zwei ihrer Punkte bestimmt, wovon einer der Punkt sein kann, worin die gegebene Gerade die Axe der Homologie trifft. —

Wenn die Axe der Homologie und zwei Punkte a, b gegeben sind, welche den beiden Punkten A, B entsprechen sollen; so kann man die homologische Figur ohne Beihilfe des Mittelpunktes der Homologie construiren, wenn man den irgend einem Punkte M entsprechenden Punkt m mittelst des Durchschnittes zweier Geraden bestimmt, welche sich um die Punkte a, b drehen, und die Geraden MA, MB resp. auf der Axe der Homologie treffen.

Auf ähnliche Weise kann man die homologe Figur construiren, wenn man blos den Mittelpunkt der Homologie und zwei Gerade dieser Figur kennt, welche zwei Geraden der gegebenen Figur entsprechen. —

§. 265. Man kann zwei homologische Figuren auch auf folgende Weise construiren: Wenn man in der Ebene der gegebenen Figur einen festen Punkt S und eine feste Axe X annimmt, von S nach irgend einem Punkte M der gegebenen Figur den Strahl SM zieht, und darauf einen Punkt m bestimmt, welcher der Relation:

$$\frac{SM}{Sm} = \lambda \cdot \frac{\mu M}{\mu m}$$

genügt, wo μ der Durchschnittspunkt von SM und X, und λ eine **Constante** ist; so gehört der Punkt m der homologischen Figur an, während S der Mittelpunkt und X die Axe der Homologie ist. —

Denn die beiden so construirten Figuren genügen einer der

beiden Conſtructionsbedingungen homologiſcher Figuren, nämlich: daß ihre homologen Punkte auf Geraden liegen, welche durch denſelben Punkt gehen, und es braucht alſo blos noch bewieſen zu werden: daß ſich zwei homologe Gerade auf der feſten Axe X ſchneiden. — Für zwei Paare entſprechender Punkte A, a, M, m iſt aber:

$$\frac{SA}{Sa} = \lambda \cdot \frac{\alpha A}{\alpha a}, \quad \frac{SM}{Sm} = \lambda \cdot \frac{\mu M}{\mu m},$$

und folglich:

$$\frac{SA}{Sa} : \frac{\alpha A}{\alpha a} = \frac{SM}{Sm} : \frac{\mu M}{\mu m} = \lambda = const.$$

Dieſe Relation zeigt: daß das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte S, A, α, a dem der vier Punkte S, M, μ, m gleich iſt, und daß ſich folglich die beiden Geraden AM, am auf der feſten Axe $\alpha\mu$ ſchneiden; w. z. b. w.

Die Conſtante λ kann füglich der Coefficient der Homologie genannnt werden. —

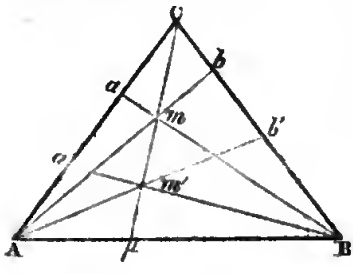
Wenn die Axe der Homologie in unendlicher Entfernung liegt, ſo wird das Verhältniß $\frac{\mu M}{\mu m} = 1$; folglich $\frac{SM}{Sm} = \lambda$. Alsdann ſind die beiden Figuren ähnlich und ähnlichliegend oder homothetiſch, S iſt der Mittelpunkt und λ das Verhältniß der Aehnlichkeit. —

Wenn der Mittelpunkt S der Homologie in unendlicher Entfernung liegt, ſo wird $\frac{SM}{Sm} = 1$; alſo $\frac{\mu M}{\mu m} = \frac{1}{\lambda}$ oder $\mu m = \lambda \cdot \mu M$. —

§. 266. Conſtruction homologiſcher Figuren, welche aus der allgemeinen Conſtruction homographiſcher Figuren abgeleitet iſt. — Wenn man bei der allgemeinen Conſtruction homographiſcher Figuren (§. 255) zu den drei Punkten A', B', C' der zweiten Figur die drei Punkte A, B, C der erſten nimmt, ſo gehen die Relationen (a) in folgende über:

$$(a') \qquad \frac{aC}{aA} = \lambda \cdot \frac{a'C}{a'A}, \quad \frac{bC}{bB} = \mu \cdot \frac{b'C}{b'B},$$

und wenn die Constanten λ, μ beliebige Werthe haben; so bieten die beiden Figuren in Bezug auf ihre gegenseitige Lage weiter nichts Besonderes dar, als daß drei Punkte der einen mit ihren resp. homologen Punkten in der andern zusammenfallen, was, wie man später sehen wird, bei jeder beliebigen Lage zweier homographischer Figuren nimmer der Fall ist. — Aber wenn die Constanten λ, μ einander gleich sind, so sind die beiden Figuren homologisch, der Punkt C ist der Mittelpunkt und die Basis AB die Axe der Homologie. — Denn wenn $\lambda = \mu$ ist, so geben die Gleichungen (a'):



$$\frac{aC}{aA} : \frac{a'A}{a'C} = \frac{bC}{bB} : \frac{b'C}{b'B},$$

woraus erhellet: daß die beiden Punktesysteme A, a, a', C und B, b, b', C dasselbe anharmonische Verhältniß haben, also auch die beiden Büschel, deren Mittelpunkte in B, A liegen, und deren Strahlen resp. durch jene Punkte gehen. — Hieraus folgt: daß die beiden homologen Geraden $ab, a'b'$ in demselben Punkte der Basis AB convergiren (§. 25), und daß die beiden Punkte m, m' mit C in gerader Linie liegen (§. 28). — Die beiden Figuren genügen also den Constructionsbedingungen homologischer Figuren. — Auch die charakteristische Relation homologischer Figuren:

$$\frac{Cm}{Cm'} : \frac{\mu m}{\mu m'} = const.$$

ergibt sich aus diesen Betrachtungen. Denn da die drei Punkte m, m', C in gerader Linie liegen, so hat man:

$$\frac{Cm}{Cm'} : \frac{\mu m}{\mu m'} = \frac{Ca}{Ca'} : \frac{Aa}{Aa'} = \lambda = const.$$

§. 267. Metrische Relationen homologischer Figuren. — Wenn man zwei homologische Figuren als zwei Figuren betrachtet, wovon die eine die Perspektive der andern gewesen ist; so folgt sofort: daß alle im Vorhergehenden hergeleiteten metrischen Relationen homographischer Figuren, auch auf homologische Figuren anwendbar sind; allein es finden wegen der besondern gegenseitigen

Lage homologiſcher Figuren, auch einige ſehr wichtige beſondere Relationen ſtatt. — Wenn man die homologiſchen Figuren auf die eine, oder andere der beiden oben angegebenen Arten conſtruirt, ſo iſt die direkte Herleitung ihrer metriſchen Fundamentalrelationen, woraus ſich alle übrigen ergeben, ſehr leicht. — Denn man braucht nur zu zeigen, daß vier in gerader Linie liegende Punkte, oder vier durch denſelben Punkt gehende Gerade der erſten Figur daſſelbe anharmoniſche Verhältniß, als die vier entſprechenden Punkte oder Geraden der zweiten Figur haben. — Nun gehen aber in zwei homologiſchen Figuren die Geraden, welche vier Punkte a, b, c, d der erſten Figur mit ihren vier homologen a', b', c', d' in der zweiten verbinden, durch denſelben Punkt (den Mittelpunkt der Homologie), und folglich ſind, wenn dieſe Punkte in zwei Geraden liegen, ihre anharmoniſchen Verhältniſſe gleich (§. 12). Ferner treffen vier durch denſelben Punkt gehende Gerade der erſten Figur die vier entſprechenden Geraden der zweiten in vier in derſelben Geraden (der Axe der Homologie) liegenden Punkten, und mithin ſind die anharmoniſchen Verhältniſſe dieſer beiden vierſtrahligen Büſchel gleich (§. 11), w. b. w. ſ.

§. 268. Wenn J, J' wieder die Geraden bezeichnen, welche in der erſten und zweiten Figur reſp. der unendlich entfernten Geraden der zweiten und erſten entſprechen; ſo ſind dieſelben offenbar zu der Axe der Homologie parallel. Denn die Gerade J und die ihr entſprechende unendlich entfernte Gerade der zweiten Figur ſchneiden ſich in demſelben Punkte der Axe der Homologie, welcher unendlich entfernt liegt, und mithin iſt J zu dieſer Axe parallel — und ebenſo ergibt ſich, daß J' zu derſelben Axe parallel iſt. —

Die Entfernungen der beiden Geraden J, J' von dem Mittelpunkte und von der Axe der Homologie hängen von der in der Gleichung:

$$\frac{Sm}{Sm'} = \lambda \cdot \frac{\mu m}{\mu m'}$$

vorkommenden Conſtante λ ab. — Denn es ſeien i, i' und x reſp. die Punkte, wo der Strahl Sm die Geraden J, J' und die Axe der

Homologie trifft, so hat man, wenn man $Sm' = \infty$ setzt: $\frac{Si}{xi} = \lambda$, und wenn $Sm = \infty$ gesetzt wird: $\frac{Si'}{xi'} = \frac{1}{\lambda}$; folglich:

$$\frac{Si}{xi} = \frac{xi'}{Si'} \text{ oder: } Si \,.\, Si' = xi \,.\, xi'.$$

Hieraus erhellet: daß die Mitte der beiden Punkte i, i' mit der der beiden Punkte S, x zusammenfällt, oder daß die Entfernung der Geraden J von dem Punkte S der der Geraden J' von der Axe der Homologie gleich, aber entgegengesetzt ist. Denn aus $\frac{Si}{xi} = \frac{xi'}{Si'}$ folgt:

$$\frac{Si}{Si - xi} = \frac{xi'}{xi' - Si'}$$

oder:

$$\frac{Si}{Sx} = \frac{xi'}{xS}, \text{ also: } Si = -xi'.$$

Dieses Resultat war leicht vorher zu sehen; denn die auf demselben Strahl liegenden Punkte m, m' beider Figuren bilden zwei homographische Theilungen, derem Doppelpunkte S, x sind — und folglich fällt die Mitte dieser Punkte mit der von i, i' zusammen (§. 100).

§. 269. Wir wollen jetzt in einer Figur zwei feste Gerade L, L_1 und in der homologischen Figur die beiden entsprechenden Geraden L', L'_1 betrachten. — Es seien mp, mq die von einem Punkte m der ersten Figur auf die beiden ersten Geraden L, L_1 und $m'p', m'q'$ die von dem entsprechenden Punkte m' der zweiten Figur auf die beiden andern Geraden L', L'_1 gezogenen Perpendikel; so stehen die Verhältnisse $\frac{mp}{mq}$, $\frac{m'p'}{m'q'}$ für jede beliebige Lage der beiden homologen Punkte m, m' in einem constanten Verhältnisse (§. 261), so daß man hat:

$$(c) \qquad \frac{mp}{mq} = \lambda \,.\, \frac{m'p'}{m'q'}.$$

Wenn die erste Gerade L der ersten Figur durch den Mittel-

punkt S der Homologie geht, so fällt sie mit ihrer homologen L' zusammen, und man hat:

$$\frac{mp}{m'p'} = \frac{Sm}{Sm'},$$

folglich:

$$(d) \qquad \frac{Sm}{Sm'} = \lambda \cdot \frac{mq}{m'q'}.$$

Wenn man also in zwei homologischen Figuren zwei feste homologe Gerade L, L' nimmt, so steht das Verhältniß der Abstände zweier beliebiger homologer Punkte m, m' von dem Mittelpunkte der Homologie zu dem Verhältnisse ihrer Abstände von den beiden festen Geraden L, L' in einem constanten Verhältnisse. —

Nimmt man die Axe der Homologie für die Gerade L, so fällt L' auch mit dieser Axe zusammen, und es wird $\frac{mq}{m'q'} = \frac{\mu m}{\mu m'}$; folglich:

$$\frac{Sm}{Sm'} = \lambda \cdot \frac{\mu m}{\mu m'},$$

welches die bereits in §. 266 erhaltene Relation ist.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden: daß die Constante λ in diesen verschiedenen Relationen, so wie in den folgenden, nicht denselben Werth behält. —

Wenn die Gerade L in unendlicher Entfernung liegt, so verschwindet das Perpendikel mq aus der Gleichung (d), und man hat:

$$(e) \qquad Sm = \lambda \cdot \frac{Sm'}{m'q'},$$

wo jetzt $m'q'$ die Entfernung des Punktes m' von der Geraden J' ist, welche in der zweiten Figur der unendlich entfernten der ersten entspricht. —

Vermittelst dieser Relation zwischen zwei homologen Figuren lassen sich die Eigenschaften der einen leicht auf die andere übertragen. —

Wenn die Gerade L in unendlicher Entfernung liegt, und für L die Gerade J genommen wird, welche der unendlich ent-

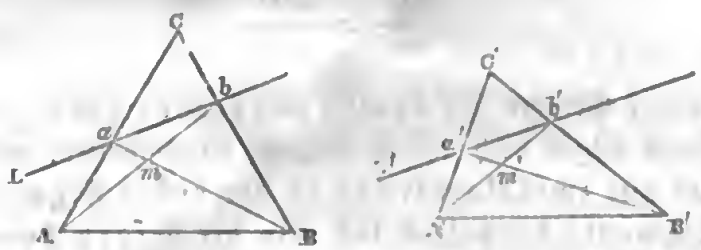
fernten Geraden der zweiten Figur entspricht; so verschwinden mp, $m'q'$ aus der allgemeinen Gleichung (e), und man hat:

$$\frac{1}{mq} = \lambda \,.\, m'p' \text{ oder: } mq \,.\, m'p' = const.$$

Also ist das Produkt der Abstände zweier homologen Punkte m, m' von den beiden Geraden J, J' constant. — Wenn also in der Ebene einer Figur zwei Parallelen gegeben sind, und man zieht von einem festen Punkte nach jedem Punkte m dieser Figur einen Strahl und nimmt darauf einen Punkt m' von solcher Beschaffenheit, daß das Produkt der Abstände der beiden Punkte m, m' von den beiden Parallelen constant ist; so beschreibt der Punkt m' eine homologische Figur von der gegebenen. —

Homographische Figuren, wovon zwei homologe Gerade in unendlicher Entfernung zusammenfallen (Affine Figuren).

§. 270. Construction solcher Figuren. — Wenn man in den Gleichungen (a) in §. 255, mittelst welcher eine homographische einer gegebenen Figur construirt wurde, die beiden Constanten $\lambda = \mu = 1$ setzt; so bieten die beiden Figuren die Eigenthümlichkeit dar: daß der unendlich entfernten Geraden der einen Figur eine ebenfalls unendlich entfernte Gerade der andern Figur ent-



spricht. — Denn wenn ab und $a'b'$ zwei homologe Gerade der beiden Figuren sind, so hat man nach der Voraussetzung:

$$\frac{aC}{aA} = \frac{a'C'}{a'A'}, \quad \frac{bC}{bB} = \frac{b'C'}{b'B'}.$$

Wenn nun die Gerade ab in unendliche Entfernung rückt,

so wird $\frac{aC}{aA} = 1, \frac{bC}{bB} = 1$; folglich auch $\frac{a'C'}{a'A'} = 1, \frac{b'C'}{b'B} = 1$; mithin müssen die beiden Punkte a', b' in unendlicher Entfernung liegen, und folglich liegt auch die Gerade $a'b'$ in unendlicher Entfernung; w. z. b. w.

Jedem unendlich entfernten Punkte der ersten Figur entspricht also auch in der zweiten ein unendlich entfernter Punkt — und zwei Parallelen in der ersten Figur entsprechen wieder zwei Parallelen in der zweiten — folglich einem Parallelogramme in der ersten auch ein Parallelogramm in der zweiten. —

§. 271. Metrische Relationen. — In diesen (affinen) Figuren vereinfachen sich die metrischen Relationen sehr, und entspringen alle aus der Haupteigenschaft: daß zwei homologe Gerade der beiden Figuren durch ihre homologen Punkte ähnlich oder proportional getheilt werden. — Denn es seien a, b, c, d vier in gerader Linie liegende Punkte der ersten Figur und a', b', c', d' die vier entsprechenden Punkte der zweiten; so hat man:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'},$$

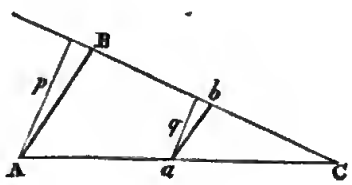
und da die auf diesen beiden Geraden unendlich entfernten Punkte homologe sind (§. 270), so kann man d, d' für diese unendlich entfernten Punkte nehmen, so daß die letzte Gleichheit wird:

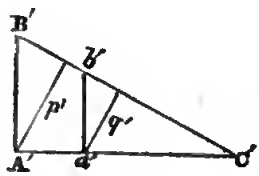
$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}$$

d. h. die beiden Geraden sind ähnlich oder proportional getheilt. —

Hieraus folgen noch andere wichtige Eigenschaften, wie:

Zwei auf zwei Parallelen in der ersten Figur genommene Segmente verhalten sich wie die beiden homologen Segmente in der zweiten.





Denn es seien AB, ab die beiden parallelen Segmente in der ersten Figur nnd $A'B', a'b'$ die beiden entsprechenden, ebenfalls parallelen Segmense in der zweiten; so hat man:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{aC}, \quad \frac{A'B'}{a'b'} = \frac{A'C'}{a'C'},$$

und wegen $\frac{AC}{aC} = \frac{A'C'}{a'C'}$ folglich:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{A'B'}{a'b'}, \text{ w. z. b. w.}$$

Ferner: Wenn in den beiden Figuren zwei feste homologe Gerade $BC, B'C'$ genommen werden, so stehen die Entfernungen $p, p'; q, q'$ irgend zweier Paare homologer Punkte $A, A'; a, a'$ von diesen beiden Geraden in einem constanten Verhältniß. —

Denn die letzte Gleichheit kann man auch so schreiben:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{ab}{a'b'},$$

und da offenbar:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{p}{q}, \quad \frac{A'B'}{a'b'} = \frac{p'}{q'}$$

ist; so folgt:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 272. Flächenrelationen. — Wenn F, f resp. die Flächeninhalte zweier Parallelogramme $ABCD, abcd$ in der ersten Figur bedeuten, deren Seiten resp. parallel sind; so hat man:

$$\frac{F}{f} = \frac{AB.AD}{ab.ad},$$

und wenn F', f' resp. die Flächeninhalte der beiden entsprechenden Parallelogramme $A'B'C'D', a'b'c'd'$ in der zweiten Figur bezeichnen, deren Seiten auch resp. parallel sind; so hat man ebenso:

$$\frac{F'}{f'} = \frac{A'B'.A'D'}{a'b'.a'd'}.$$

Wegen $\frac{AB}{ab} = \frac{A'B'}{a'b'}$ und $\frac{AD}{ad} = \frac{A'D'}{a'd'}$ (§. 271) hat man folglich:

$$\frac{F}{f} = \frac{F'}{f'} \text{ oder } \frac{F}{F'} = \frac{f}{f'},$$

d. h.: Wenn man in der ersten Figur irgend ein Parallelogramm nimmt, dessen Seiten zu zwei festen Axen parallel sind; so steht die Fläche desselben zu der des entsprechenden Parallelogrammes in der zweiten Figur in einem constanten Verhältnisse. —

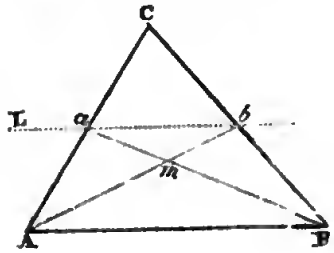
Hieraus folgt: daß die Flächeninhalte zweier beliebiger entsprechender (affiner) Figuren in einem constanten Verhältnisse stehen — weil man sich diese Figuren immer in unendlich viele unendlich kleine Parallelogramme zerlegt denken kann, deren Seiten zu zwei festen Axen parallel sind. —

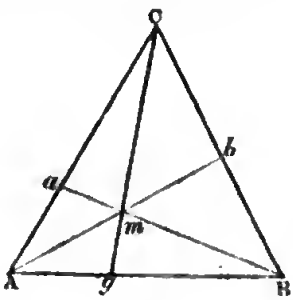
Diese Flächenrelationen sind offenbar dieselben, als die zwischen zwei Figuren stattfindenden, wovon die eine die Projektion der andern ist —

Theorie der correlativen (reciproken) Figuren.

§. 273. Zwei Figuren heißen correlativ (reciprok), wenn den Punkten der einen Gerade in der andern entsprechen — und zwar so: daß den in gerader Linie liegenden Punkten der einen durch denselben Punkt gehende Gerade in der andern entsprechen — mit der Bedingung: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte dem der vier Geraden gleich ist. — Weil den in gerader Linie liegenden Punkten der ersten Figur in der zweiten durch denselben Punkt gehende Gerade entsprechen, also dieser Punkt jener Geraden entspricht; so kann man auch sagen: daß in zwei correlativen (reciproken) Figuren einem Punkte und einer Geraden der einen resp. eine Gerade und ein Punkt der andern entspricht. —

§. 274. Construction correlativer (reciproker) Figuren. — Wenn man in der Ebene einer Figur ein beliebiges Dreieck ABC annimmt, zieht aus seinen beiden Ecken





A, B nach irgend einem Punkte m der Figur die Geraden Am, Bm, welche auf den beiden Gegenseiten zwei Segmentenverhältnisse $\frac{bB}{bC}$, $\frac{aA}{aC}$ bestimmen, und nimmt auf den Seiten $A'C', B'C'$ eines zweiten **beliebigen** Dreieckes $A'B'C'$ zwei Punkte a', b' so, daß man die Relationen hat:

$$(1) \qquad \frac{aA}{aC} = \lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'}, \quad \frac{bB}{bC} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'},$$

wo λ und μ zwei **Constanten** sind; so gehört die Gerade $a'b'$ einer zu der gegebenen correlativen Figur an, und entspricht dem Punkte m der gegebenen Figur. —

Es muß also bewiesen werden: 1) daß, wenn die Punkte m in gerader Linie liegen, die entsprechenden Geraden durch denselben Punkt gehen; 2) daß durch denselben Punkt gehenden Geraden der ersten Figur in gerader Linie liegende Punkte der zweiten entsprechen; 3) daß das anharmonische Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten der ersten Figur dem der vier entsprechenden Geraden der zweiten gleich ist, und 4) daß das anharmonische Verhältniß von vier durch denselben Punkt gehenden Geraden der ersten Figur dem der vier entsprechenden Punkte der zweiten Figur gleich ist.

1) Wenn die Punkte m in gerader Linie liegen, so hat man nach §. 244 die Relation:

$$\alpha \cdot \frac{aC}{aA} + \varepsilon \cdot \frac{bC}{bB} = 1,$$

und mithin wegen (1) die Relation:

$$\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{a'A'}{a'C'} + \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{b'B'}{b'C'} = 1,$$

welche zeigt: daß die Gerade $a'b'$ stets durch denſelben Punkt geht (§. 247).

2) Wenn eine Gerade L der erſten Figur gegeben iſt, ſo iſt der ihr in der zweiten Figur entſprechende Punkt l' der Punkt, durch welchen alle den verſchiedenen Punkten der Geraden L entſprechende Geraden gehen. — Wenn alſo in der erſten Figur mehrere Gerade L durch denſelben Punkt gehen, ſo liegen die ihnen in der zweiten Figur entſprechenden Punkte in einer Geraden, welche die dieſem Punkte entſprechende Gerade iſt. —

3) Wenn vier Punkte m in gerader Linie liegen, ſo iſt ihr anharmoniſches Verhältniß dem der vier Punkte a gleich, welches wegen der erſten der Relationen (1) dem der vier Punkte a' gleich iſt — und dieſes iſt dem der vier Geraden $a'b'$ gleich, weil dieſe Geraden durch denſelben Punkt gehen. Mithin iſt das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte m dem der vier Geraden $a'b'$ gleich. —

4) Denn das anharmoniſche Verhältniß von vier durch denſelben Punkt gehenden Geraden L der erſten Figur iſt dem der vier Punkte a gleich, welches dem der vier Punkte a' gleich iſt, welches letztere dem der vier Punkte l', die den vier Geraden L entſprechen, gleich iſt. — Folglich ꝛc.

Der Satz iſt alſo vollſtändig erwieſen. —

§. 275. Aus den Gleichungen (1) folgt ferner: daß dem Punkte a der erſten Figur die Gerade $B'a'$ der zweiten entſpricht. Denn wenn der Punkt m in a auf AC liegt, ſo iſt $bC=0$; folglich $b'B'=0$, ſo daß die Gerade $a'b'$ durch den Punkt B' geht. — Ebenſo entſpricht dem Punkte b die Gerade $A'b'$ — und folglich entſpricht der Geraden ab der Durchſchnittspunkt l' der beiden Geraden $B'a', A'b'$. — Den beiden Geraden Ab, Ba entſprechen alſo die beiden Punkte b', a'; folglich den drei Geraden AC, BC, AB die drei Punkte B', A', C', und mithin den drei Punkten A, B, C die drei Geraden $B'C', A'C', A'B'$. —

Weil der Geraden ab der Punkt l' entſpricht, ſo kann man ſagen: daß die Gerade, welche in der erſten Figur einem Punkte der zweiten entſpricht, durch die Gleichungen (1) beſtimmt wird, welche man ſo ſchreiben kann:

$$(1') \qquad \frac{a'A'}{a'C'} = \lambda \cdot \frac{aC}{aA}, \quad \frac{b'B'}{b'C'} = \mu \cdot \frac{bC}{bB};$$

d. h. die einem Punkte entsprechende Gerade wird in beiden Figuren durch ähnliche Gleichungen mit denselben Coefficienten bestimmt

§. 276. Allen in unendlicher Entfernung liegenden Punkten der einen Figur entsprechen in der andern Gerade, welche durch denselben Punkt gehen. — Mit andern Worten: Dem Unendlichen in der einen Figur entspricht ein Punkt in der andern. —

Denn wenn ein Punkt m in unendlicher Entfernung liegt, so sind die beiden Geraden Am, Bm parallel, und man hat:

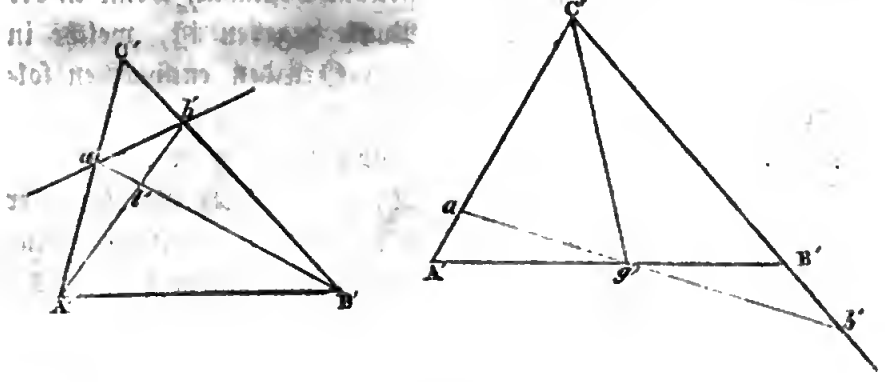
$$\frac{aC}{aA} + \frac{bC}{bB} = 1; \text{ (§. 249, 7),}$$

folglich wegen (1'):

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{a'A'}{a'C'} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{b'B'}{b'C'} = 1,$$

welche Gleichung zeigt, daß die einen unendlich entfernten Punkte m entsprechende Gerade $a'b'$ stets durch einen festen Punkt geht (§ 247). Folglich ꝛc.

§ 277. Den auf der Basis AB in der ersten Figur liegenden Punkten entsprechen in der zweiten Figur durch den Punkt C' ge-



hende Gerade. Z. B. dem Punkte g entspricht die Gerade $C'g'$ — und umgekehrt, dem Punkte g' in der zweiten Figur entspricht die Gerade Cg in der ersten. —

Ferner hat man zwiſchen den beiden Punkten g, g' die Relation:

$$\frac{gA}{gB} = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{g'B'}{g'A'}.$$

Denn einem auf der Geraden Cg liegenden Punkte m entſpricht eine durch den Punkt g' gehende Gerade $a'b'$, weil dieſer Punkt der Geraden Cg entſpricht. — Die in dem Dreiecke ABC durch den Punkt m gehenden drei Geraden geben die Relation:

$$\frac{gA}{gB} \cdot \frac{aC}{aA} \cdot \frac{bB}{bC} = -1, \text{ (§. 205)}$$

welche wegen der Relationen (1) in folgende übergeht:

$$\frac{gA}{gB} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{a'A'}{a'C'} \cdot \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'} = -1.$$

Aber da die drei Punkte g', a', b' in gerader Linie liegen, ſo hat man in dem Dreiecke $A'B'C'$:

$$\frac{g'A'}{g'B'} \cdot \frac{a'C'}{a'A'} \cdot \frac{b'B'}{b'C'} = 1; \text{ (§. 201)}$$

folglich:

$$\frac{gA}{gB} \cdot \frac{g'A'}{g'B'} \cdot \frac{\mu}{\lambda} = -1 \text{ oder: } \frac{gA}{gB} = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{g'B'}{g'A'}, \text{ w. z. b. w.}$$

Die beiden Conſtanten λ, μ ſind offenbar beſtimmt, wenn in der zweiten Figur die Gerade, oder der Punkt gegeben iſt, welche in der erſten Figur einem Punkte, oder einer Geraden entſprechen ſollen. — Folglich kann man nach §. 274 zu einer gegebenen Figur eine correlative (reciproke) conſtruiren, ſowohl, wenn in der zu bildenden Figur vier Punkte gegeben ſind, welche vier Geraden der gegebenen Figur entſprechen ſollen, als wenn drei Punkte und eine Gerade gegeben ſind, welche drei Geraden und einem Punkte der gegebenen Figur entſprechen ſollen. —

§. 278. Unterſuchung der Gleichungen (1). — Die obige Conſtructionsart correlativer (reciproker) Figuren beruht auf der Betrachtung zweier Dreiecke $ABC, A'B'C'$, welche reſp. den beiden Figuren angehören, und wovon die Spitzen des einen den Seiten des andern entſprechen. —

Zu den Spitzen des einen Dreieckes nimmt man drei beliebige Punkte der zu construirenden Figur, und man kann diese Punkte so wählen, daß in jedem der beiden Dreiecke eine Spitze, oder eine Seite in unendlicher Entfernung liegt, was zu mehreren Fällen führt, wo ein, oder zwei Segmente aus den Gleichungen (1) verschwinden. —

1) Wenn der Punkt C in unendlicher Entfernung liegt, so werden die Gleichungen (1):

$$aA = \lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'}, \; bB = \mu \cdot \frac{bC}{b'B'},$$

und alsdann geht die Basis $A'B'$ in der zweiten Figur durch den Punkt, welcher dem Unendlichen in der ersten Figur entspricht. —

2) Der Punkt C' entspricht der Basis AB in der ersten Figur. Wenn diese Gerade durch den Punkt geht, welcher den unendlich entfernten Geraden der zweiten Figur entspricht, so liegt der Punkt C' in unendlicher Entfernung, und die Gleichungen werden:

$$aA = \frac{\lambda}{a'A'}, \; bB = \frac{\mu}{b'B'}.$$

3) Wenn die beiden Punkte A, B in unendlicher Entfernung liegen, so werden die Gleichungen:

$$\frac{1}{aC} = \lambda \cdot \frac{a'C'}{a'A'}, \; \frac{1}{bC} = \mu \cdot \frac{b'C'}{b'B'},$$

und der Punkt C' entspricht den unendlich entfernten Geraden der ersten Figur. —

4) Wenn der Punkt C dem Unendlichen der zweiten Figur entspricht, so liegt $A'B'$ in unendlicher Entfernung, und die Gleichungen werden:

$$\frac{1}{aC} = \lambda \cdot a'C', \; \frac{1}{bC} = \mu \cdot b'C'.$$

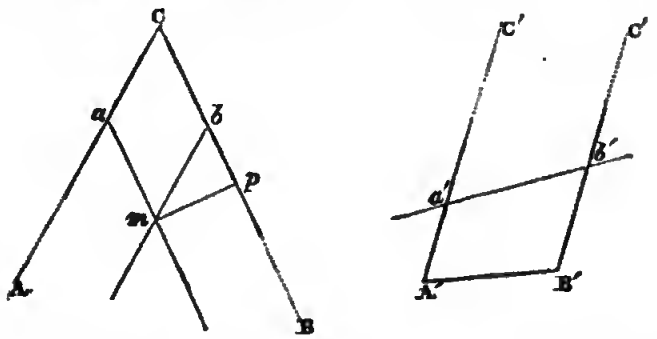
5) Wenn der Punkt C und die Basis $B'C'$ in unendlicher Entfernung liegen, so hat man:

$$aA = \lambda \cdot a'C', \; bB = \mu \cdot b'C'.$$

Dieſe verſchiedenen Gleichungen ſind auf beliebige correlative Figuren anwendbar. —

In den Gleichungen (1) kann man für ein Segmentenverhältniß ein Sinusverhältniß, z. B. für $\frac{aA}{aC}$ das Verhältniß $\frac{\sin aBA}{\sin aBC}$ ſetzen (§. 257), ſo daß man auch die Geraden AC, BC, ſowie die Geraden $A'C'$, $B'C'$ in unendlicher Entfernung annehmen kann. —

§. 279. Beſonderer Fall. — Wenn der Punkt der zweiten Figur, welcher dem Unendlichen der erſten entſpricht, ſelbſt in unendlicher Entfernung liegt; ſo kann man denſelben als die



Spitze C' nehmen. Alsdann liegt die Baſis AB des erſten Dreieckes in unendlicher Entfernung, man und hat:

$$aC = \frac{1}{\lambda}\, a'A',\quad bC = \frac{1}{\mu}\, b'B'.$$

Wenn man in der erſten dieſer beiden Gleichungen für das Segment aC die Entfernung mp des Punktes m von der Axe CB ſetzt, ſo erhält man die Gleichheit:

$$mp = \nu \,.\, a'A',$$

welche folgenden Satz ausdrückt:

Wenn der Punkt der zweiten Figur, welcher dem **Unendlichen** der erſten entſpricht, ſelbſt in **unendlicher** Entfernug liegt, und man nimmt in der zweiten eine gegen dieſen **unendlich** entfernten Punkt gerichtete Axe, auf dieſer einen feſten Punkt A' und in der erſten Figur die dem Punkte A' entſprechende Gerade CB; ſo ſteht das Segment $A'a'$, welches eine beliebige Gerade der zweiten

Figur auf dieſer Axe beſtimmt, zu dem Abſtande des entſprechenden Punktes m in der erſten Figur von der dem Punkte A' entſprechenden Geraden CB in einem conſtanten Verhältniß. —

§. 280. Metriſche Relationen. — Die Fundamentaleigenſchaft, woraus ſich alle metriſchen Relationen correlativer (reciproker) Figuren ergeben, iſt die in der Definition ſolcher Figuren vorkommende: daß das anharmoniſche Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten der einen Figur dem der vier entſprechenden Geraden der andern gleich iſt. —

Daraus folgt: Wenn in der einen Figur Punkte in gerader Linie liegen, ſo treffen die ihnen in der andern Figur entſprechenden Geraden jene Gerade in Punkten, welche mit den erſten zwei homographiſche Theilungen bilden. —

Hieraus folgt weiter: Auf einer Geraden gibt es im Allgemeinen zwei reelle, oder imaginäre Punkte von ſolcher Beſchaffenheit, daß ihre entſprechenden Geraden reſp. durch dieſe Punkte ſelbſt gehen. — Und: Durch einen Punkt kann man im Allgemeinen zwei reelle, oder imaginäre Geraden ziehen, welche durch ihre correlativen Punkte gehen. —

§. 281. Wenn a, b, c, m vier in gerader Linie liegende Punkte der erſten Figur, und A, B, C, M die ihnen entſprechenden Geraden der zweiten ſind, ſo hat man:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} : \frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)},$$

oder:

$$\frac{am}{bm} = \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} \cdot \left[\frac{ac}{bc} : \frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)}\right]$$

$$= \lambda \cdot \frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)},$$

weil die eingeklammerte Größe für jede Lage des Punktes m conſtant iſt. — Denkt man ſich nun in der erſten Figur eine durch den Punkt m gehende Gerade, ſo liegt der correlative Punkt der

zweiten Figur auf der Geraden M, und $\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)}$ ist das Verhältniß der Abstände dieses Punktes von den beiden festen Geraden A, B. — Die letzte Gleichung drückt also den Satz aus:

1) Wenn in einer Figur zwei feste Punkte a, b und in einer correlativen Figur die beiden entsprechenden Geraden A, B angenommen werden, so steht das Verhältniß der Segmente, welche eine beliebige Gerade der ersten Figur auf ab bestimmt, zu dem Verhältniß der Abstände des dieser Geraden entsprechenden Punktes von den beiden Geraden A, B in einem constanten Verhältniß. —

Das Verhältniß der von einer Geraden auf ab bestimmten Segmente ist dem Verhältnisse der Abstände dieser Geraden von den beiden Punkten a, b gleich, so daß man auch den Satz hat:

2) Wenn in einer Figur zwei feste Punkte, und in der correlativen Figur die beiden entsprechenden Geraden genommen werden; so steht das Verhältniß der Abstände einer beliebigen Geraden der ersten Figur von diesen beiden Punkten zu dem Verhältniß der Abstände der entsprechenden Punkte der zweiten Figur von den beiden festen Geraden in einem constanten Verhältniß. —

Wenn eine der beiden festen Geraden in unendlicher Entfernung angenommen wird, so verschwindet der Abstand eines Punktes von dieser Geraden aus der Gleichung, wie wenn derselbe $= 1$ geworden wäre, und man hat alsdann den Satz:

3) Wenn zwei correlative Figuren gegeben sind, so steht die Entfernung eines beliebigen Punktes der einen von einer festen Geraden zu dem Verhältniß der Abstände der entsprechenden Geraden der andern von zwei festen Punkten, wovon der eine der festen Geraden und der andere dem Unendlichen der ersten Figur entspricht, in einem constanten Verhältniß. —

Wenn in dem zweiten Satze der Punkt b in unendlicher Entfernung angenommen wird, so verschwindet das Segment bm aus der letzten Gleichung, und ihr erster Theil reducirt sich auf am, so daß man den folgenden Lehrsatz hat:

4) Wenn zwei Figuren correlativ sind, so steht das

Segment, welches eine beliebige Gerade der ersten auf einer festen Axe, von einem festen Punkte aus gezählt, bestimmt, zu dem Verhältniß der Abstände des dieser Geraden in der zweiten Figur entsprechenden Punktes von den beiden Geraden, wovon die eine dem festen Punkte und die andere dem auf jener Axe in **unendlicher** Entfernung liegenden Punkte entspricht, in einem constanten Verhältniß. —

Wenn man zu dem festen Punkte der ersten Figur den Punkt nimmt, welcher in der zweiten Figur dem Unendlichen entspricht, so verschwindet der Abstand eines Punktes der zweiten Figur von dieser unendlich entfernten Geraden aus der Gleichung, und man hat folgenden Satz:

5) Wenn man durch den Punkt J der einen zweier correlativer Figuren, welcher der unendlich entfernten Geraden der andern entspricht, eine feste Axe zieht, und in der zweiten Figur die Gerade, welche dem auf dieser Axe in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der ersten entspricht; so steht das von dem Punkte J aus gezählte Segment, welches eine beliebige Gerade der ersten Figur auf der festen Axe bestimmt, zu dem reciproken Werthe des Abstandes des entsprechenden Punktes der zweiten Figur von der festen Geraden, welche dem auf der festen Axe unendlich entfernten Punkte entspricht, in einem constanten Verhältniß. —

§. 282. Nach dem zweiten Satze des vorhergehenden Paragraphen kann man folgende neue Definition correlativer (reciproker) Figuren aufstellen:

Zwei Figuren heißen correlativ (reciprok), wenn den **Punkten** der einen **Gerade** in der andern entsprechen, und zwar so: daß die Verhältnisse der Abstände jedes **Punktes** der ersten Figur von drei festen **Geraden** zu den Verhältnissen der Abstände der entsprechenden **Geraden** der zweiten Figur von drei festen **Punkten** in constanten Verhältnissen stehen. —

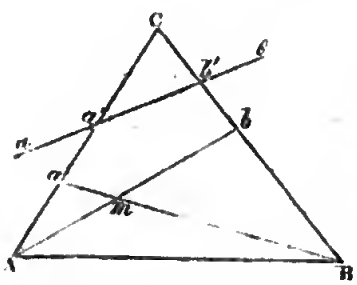
Man kann eine der festen Geraden der zweiten Figur in unendlicher Entfernung annehmen, und alsdann verschwindet

der Abstand eines Punktes von dieser Geraden aus den zwischen den beiden Figuren stattfindenden Relationen, wie wenn dieser Abstand = 1 geworden wäre. — Ebenso kann man annehmen: daß einer, oder zwei der drei festen Punkte der ersten Figur auf gegebenen Richtungen in unendlicher Entfernung liegen — und alsdann für das Verhältniß der Abstände einer Geraden von zwei Punkten das Verhältniß der Segmente setzen, welche diese Gerade auf der Verbindungslinie dieser beiden Punkte bestimmt — und wenn einer dieser Punkte in unendlicher Entfernung liegt; so verschwindet das sich darauf beziehende Segment aus der Gleichung, wie wenn es = 1 geworden wäre, so daß man z. B. den Satz hat:

Wenn die Abstände eines Punktes von zwei festen Axen resp. den Segmenten proportional sind, welche eine Gerade auf zwei andern festen Axen, von ihrem Durchschnittspunkte aus gezählt, bestimmt; so gehören der Punkt und die Gerade zwei correlativen Figuren an. —

Eigenschaften correlativer Figuren.

§. 283. Wenn von drei Punkten A, B, C einer Figur jeder die Verbindungslinie der beiden andern in der correlativen Figur zur entsprechenden Geraden hat, so haben diese drei Punkte, wenn sie als der zweiten Figur angehörend betrachtet werden, in der ersten Figur dieselben Geraden als correlative — und dasselbe ist mit jedem andern Punkte der Fall; d. h. jeder Punkt hat, wenn er successive als der ersten und zweiten Figur angehörig betrachtet wird, in beiden Fällen dieselbe Gerade zur correlativen. —



Denn nach der Voraussetzung sind A, B, C drei Punkte der ersten Figur und BC, CA, AB die diesen Punkten entsprechenden Geraden der zweiten Figur. Der Punkt A, als Durchschnittspunkt der beiden Geraden AB, AC der zweiten Figur, und mithin als dieser angehörig betrachtet, hat also in der ersten Figur BC zur correlativen Geraden, welche die den beiden Geraden AB, AC der zweiten entsprechenden Punkte C, B der ersten verbindet, so daß der erste Theil des Satzes bewiesen ist. —

Iſt ferner m ein Punkt der erſten Figur, ſo wird die entſprechende Gerade $a'b'$ der zweiten Figur beſtimmt, wenn man die beiden Geraden mA, mB zieht, und:

$$(\alpha) \qquad \frac{aA}{aC} = \lambda \cdot \frac{a'C}{a'A}, \quad \frac{b'C}{b'B} = \mu, \quad \frac{b'C}{b'B}$$

nimmt (§. 275). Wird nun der Punkt m als der zweiten Figur angehörend betrachtet, ſo wird die entſprechende Gerade $\alpha\mathfrak{S}$ der erſten durch die Gleichung:

$$\frac{aA}{aC} = \lambda \cdot \frac{\alpha C}{\alpha A}, \quad \frac{bB}{bC} = \mu \cdot \frac{\mathfrak{S}C}{\mathfrak{S}B}$$

beſtimmt (§. 275); folglich iſt:

$$\frac{aC}{aA} = \frac{a'C}{a'A}, \quad \frac{\mathfrak{S}C}{\mathfrak{S}B} = \frac{b'C}{b'B},$$

alſo fallen die Punkte $\alpha, \mathfrak{S}$ mit a', b' zuſammen, und mithin iſt $a'b'$ die dem Punkte m der zweiten Figur entſprechende Gerade der erſten, ſo daß auch der zweite Theil des Satzes bewieſen iſt. —

Man kann auch die Gerade $a'b'$ als der erſten Figur angehörend betrachten, und den ihr in der zweiten entſprechenden Punkt ſuchen. — Zu dem Zwecke beſtimmt man auf AC, BC die beiden Punkte a'', b'' durch die Gleichungen:

$$(\beta) \qquad \frac{a'A}{a'C} = \lambda \cdot \frac{a''C}{a''A}, \quad \frac{b'B}{b'C} = \mu \cdot \frac{b''B}{b''C};$$

alsdann entſprechen die Geraden Ab'', Ba'' den beiden Punkten a', b', und ihr Durchſchnittspunkt iſt der entſprechende Punkt der zweiten Figur von der Geraden $a'b'$ der erſten. — Aus der Vergleichung der Relationen (β) mit (α) folgt aber, daß die beiden Punkte a'', b'' reſp. mit a, b zuſammenfallen, ſo daß der geſuchte Punkt mit m zuſammenfällt.

§. 284. Wenn zwei correlative Figuren in einer Ebene eine beliebige gegenſeitige Lage haben, und man betrachtet jeden Punkt m dieſer Ebene ſucceſſive als beiden Figuren angehörig; ſo entſprechen ihm zwei Gerade in den beiden Figuren — und wenn der Punkt m eine beliebige Figur beſchreibt, ſo umhüllen dieſe beiden Geraden zwei homographiſche Figuren. — Denn es

finden zwiſchen dieſen beiden Figuren alle Beziehungen ſtatt, welche homographiſche Figuren charakteriſiren (§. 254). Hieraus folgt weiter:

Wenn zwei correlative Figuren ſo beſchaffen ſind: daß vier Punkte ihrer Ebene, wenn ſie ſucceſſive als der einen, oder der andern angehörend betrachtet werden, ſtets dieſelben correlativen Geraden haben; ſo iſt dieſes auch für jeden andern Punkt der Fall. —

Denn die beiden Figuren geben zwei homographiſche Figuren, welche vier gemeinſchaftliche Punkte haben, und folglich ganz zuſammenfallen (§. 258).

Aus dem Vorhergehenden folgt ferner: Wenn zwei correlative Figuren eine beliebige gegenſeitige Lage haben, ſo gibt es im Allgemeinen drei Punkte, wovon jeder in den beiden Figuren dieſelbe correlative Gerade hat. — Zwei dieſer drei Punkte können **imaginär** ſein; aber der dritte iſt ſtets **reell**. —

§. 285. Das Verhältniß zweier auf derſelben Geraden liegen den Segmenten ab, cd läßt ſich leicht homographiſch und correlativ transformiren. — Denn wenn i den auf der Geraden ab unendlich entfernten Punkt bezeichnet, ſo kann man ſchreiben:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{ab}{ac} : \frac{cd}{ac} = \left(\frac{ab}{ac} : \frac{ib}{ic}\right) : \left(\frac{cd}{ac} : \frac{id}{ai}\right)$$

$$= \left(\frac{a'b'}{a'c'} : \frac{i'b'}{i'c'}\right) : \left(\frac{c'd'}{a'c'} : \frac{i'd'}{a'i'}\right)$$

$$= \frac{a'b'}{c'd'} \cdot \frac{i'c' \cdot i'd'}{i'a' \cdot i'b'} = \frac{a'b'}{c'd'} : \frac{i'a' \cdot i'b'}{i'c' \cdot i'd'},$$

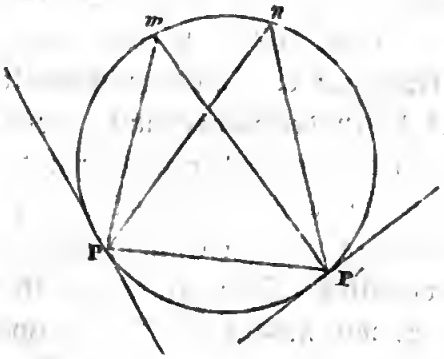
wo a', b', c', d', i' die homologen Punkte der zweiten Figur ſind. —

Bezeichnen nun A', B', C', D', J' die den Punkten a, b, c, d, i der erſten Figur entſprechenden Geraden in der correlativen Figur; ſo hat man offenbar:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{\sin(A', B')}{\sin(C', D')} : \frac{\sin(J', A') \cdot \sin(J', B')}{\sin(J', C') \cdot \sin(J', D')} \quad (\text{§. 11.})$$

II. Eigenschaften von Kreisen.

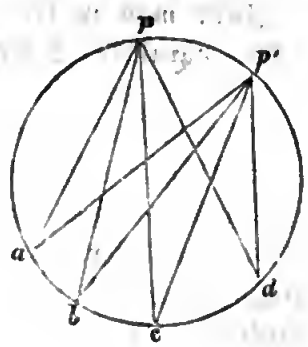
§. 286. Die einzige Eigenschaft des Kreises, welche wir hier als bekannt voraussetzen, ist die: daß Peripheriewinkel über derselben Sehne einander gleich, oder Supplemente von einander sind — und dieser Satz soll uns dazu dienen, in die Theorie des Kreises den Begriff des anharmonischen Verhältnisses einzuführen, welcher die Grundlage der folgenden Entwickelungen bilden wird. —



Wenn man von zwei festen Punkten P, P' eines Kreises nach beliebigen andern Punkten $m, n, \ldots$ desselben Gerade zieht, so bilden dieselben zwei homographische Büschel.

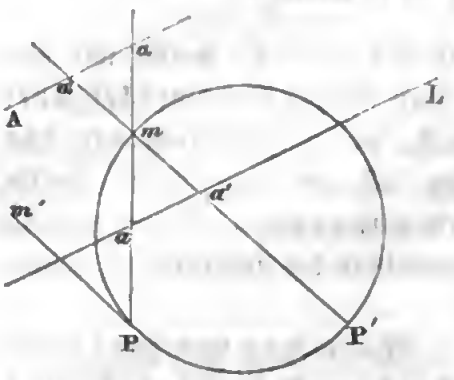
Denn irgend zwei Strahlen Pm, Pn des ersten Büschels bilden denselben Winkel miteinander, wie die beiden entsprechenden Strahlen $P'm, P'n$ des andern Büschels, und folglich sind diese beiden Büschel homographisch (§. 94). — Offenbar hat der Strahl PP' des ersten Büschels in dem zweiten die Tangente in P' und der Strahl $P'P$ des zweiten Büschels in dem ersten die Tangente in P zum homologen Strahl.

Der vorhergehende Satz läßt sich auch so ausdrücken: Wenn

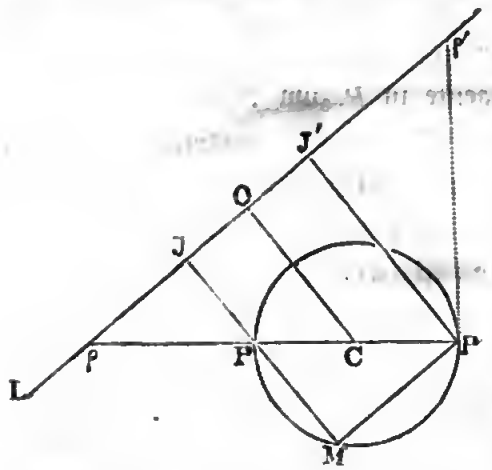


man durch vier Punkte a, b, c, d eines Kreises nach einem beliebigen fünften Punkte p desselben Gerade zieht, so ist das anharmonische Verhältniß dieser vier Geraden für jede Lage des Punktes p constant. — Und wir werden diesen constanten Werth das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d des Kreises nennen.

§. 287. Aufgabe. Die Durchschnittspunkte einer Geraden L und eines Kreises zu finden. — Aufl. Die beiden sich um die Punkte P, P' drehenden Strahlen $Pm, P'm$ bestimmen auf



der Geraden L zwei homographische Theilungen, deren Doppelpunkte offenbar die gesuchten Durchschnittspunkte sind. — Diese Punkte werden mittelst dreier Paare conjugirter Punkte a, a' construirt, oder wenn man sich der Punkte J, J' bedient, deren homologe in unendlicher Entfernung liegen (§. 102). Hieraus folgt: daß sich die Eigenschaften in Beziehung auf die Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Geraden aus denen der Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen ergeben, und dieses Verfahren hat den großen Vortheil, daß man den Begriff imaginärer Punkte in die Theorie des Kreises einführen kann, wodurch eine der Entwickelung der reinen Geometrie sehr hinderliche, wesentliche Schwierigkeit beseitigt wird; denn später werden wir sehen, wie nützlich die Betrachtung des Imaginären selbst bei den Beweisen von Sätzen sein kann, welche sich ausschließlich auf reelle Gegenstände beziehen. —



§. 288. Es seien P, P' die Endpunkte eines Durchmessers und ϱ der Durchschnittspunkt desselben mit der gegebenen Geraden L. Zieht man zu dieser Geraden die parallele Sehne $P'M$, und hierauf die Sehne PM; so bestimmt diese den Punkt J auf L (§. 102), welcher mithin der Fußpunkt des aus dem Punkte P auf die Gerade gefällten Perpendikels ist, und ebenso bestimmt das Perpendikel $P'J'$ den Punkt J'. Die Mitte O der beiden Punkte J, J' ist die Mitte der beiden Durchschnittspunkte (§. 102), und man hat folglich den Satz: Der Fußpunkt des aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Gerade gefällten Perpendikels ist die Mitte der beiden reellen,

oder imaginären Durchschnittspunkte der Geraden und des Kreises. —

§. 289. Betrachtet man den Punkt ϱ als der ersten Theilung, und folglich als dem Strahle PP' des ersten Büschels angehörig, so liegt der homologe Punkt ϱ' auf der in P' auf PP' senkrechten Tangente. — Man kann die beiden homographischen Theilungen durch die Gleichung:

$$\varrho a \cdot \varrho a' - \varrho J' \cdot \varrho a - \varrho J \cdot \varrho a' + \varrho J \cdot \varrho \varrho' = 0$$

ausdrücken (§. 100), und die Durschnittspunkte der Geraden und des Kreises werden durch die Gleichung:

$$(\varrho a)^2 - (\varrho J + \varrho J')\, \varrho a + \varrho J \cdot \varrho \varrho' = 0$$

bestimmt. — Wenn e, f diese reellen, oder imaginären Punkte bezeichnen, so ist das Produkt $\varrho e, \varrho f$ dem letzten Gliede $\varrho J \cdot \varrho \varrho'$ gleich. —

Oder: Betrachtet man die beiden Punkte ϱ, J der ersten Theilung, deren homologe in der zweiten Theilung ϱ', J' sind (wo J' in unendlicher Entfernung liegt); so bilden die beiden Punktepaare ϱ, J; ϱ', J' mit e, f eine Involution (§ 159), deren Centralpunkt ϱ ist, weil der conjugirte Punkt J', in unendlicher Entfernung liegt. Man hat folglich:

$$\varrho e \cdot \varrho f = \varrho J \cdot \varrho \varrho'' \text{ (§. 124)}$$

und die beiden ähnlichen Dreiecke $\varrho JP, \varrho P'\varrho'$ geben:

$$\frac{\varrho J}{\varrho P} = \frac{\varrho P'}{\varrho \varrho'} \text{ oder } \varrho J \cdot \varrho \varrho' = \varrho P \cdot \varrho P',$$

mithin ist:

$$\varrho e \cdot \varrho f = \varrho P \cdot \varrho P' = const.$$

Man hat also den Satz:

Wenn man um einen Punkt ϱ sich eine Transversale L drehen läßt, so ist das Produkt der zwischen diesem Punkte und den beiden reellen, oder imaginären Durchschnittspunkten derselben mit dem Kreise liegenden Segmente constant. —

Es sei C der Mittelpunkt und R der Halbmesser des Kreises, so hat man:

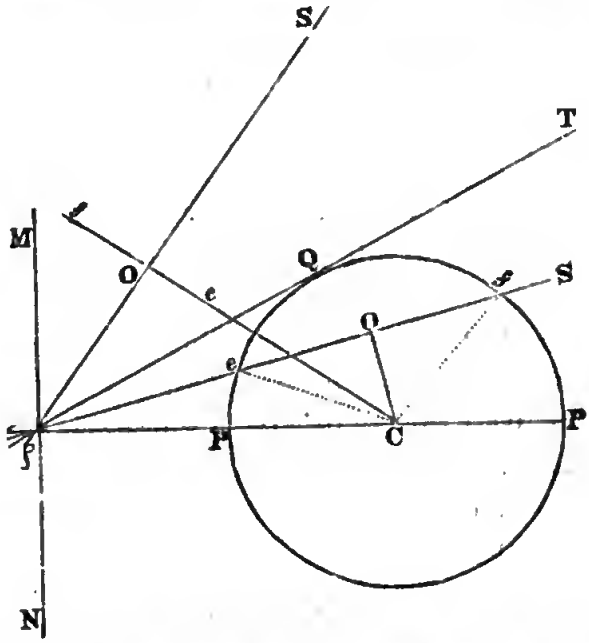
$$\varrho P \cdot \varrho P' = (\varrho C)^2 - R^2,$$

und folglich:

$$\varrho e \cdot \varrho f = (\varrho C)^2 - R^2. \text{ *)}$$

---

*) Die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte e, f einer Geraden und eines Kreises und deren Eigenschaften lassen sich auch sehr einfach direkt angeben, ohne daß man zu der Betrachtung der Doppelpunkte homographischer Theilungen seine Zuflucht zu nehmen braucht. —



Denn es sei C der Kreis und ϱS eine Sekante, so hat man offenbar:

$$\varrho e = \varrho O - eO = \varrho O - \sqrt{R^2 - (CO)^2},$$

$$\varrho f = \varrho O + eO = \varrho O + \sqrt{R^2 - (CO)^2};$$

folglich:

$$\varrho e \cdot \varrho f = (\varrho O)^2 - R^2 + (CO)^2 = (\varrho C)^2 - R^2 = const.$$

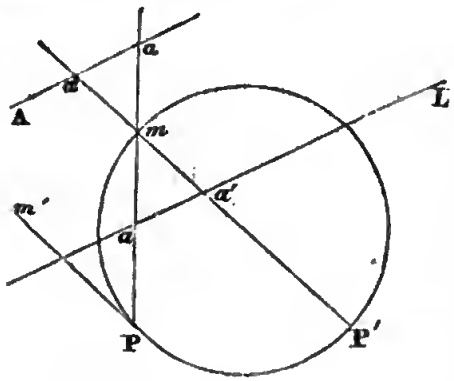
Drehet sich nun diese Sekante um den festen Punkt ϱ von der Rechten gegen die Linke, so nähern sich die beiden Durchschnittspunkte e, f einander fortwährend, und wenn die Sekante eine Tangente ϱT des Kreises wird; so fallen sie in dem Berührungspunkte Q zusammen. — Setzt die Sekante ihre Drehung in demselben Sinne noch weiter fort, so werden die beiden, bisher reellen Durchschnittspunkte e, f imaginär, liegen also nicht mehr auf der Sekante ϱS selbst, sondern auf dem Perpendikel CO, und zwar in gleichen Abständen von dem Punkte O. Denn da jetzt $CO > R$ ist, so kann man schreiben:

Wenn der Punkt ϱ die Mitte O der beiden Punkte e, f ist so hat man:

$$Of = -Oe \text{ und } (Oe)^2 = R^2 - (OC)^2.$$

Da die Mitte der beiden Durchschnittspunkte einer Geraden und eines Kreises der Fußpunkt des aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade gefällten Perpendikels ist (§. 288), so folgt hieraus:

Wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt drehet, so ist der Ort der Mitte ihrer beiden reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte mit einem festen Kreise ein zweiter Kreis, dessen Durchmesser die von dem festen Punkte nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises gehende Gerade ist. —



§. 290. Wenn eine Gerade A einen Kreis nicht trifft, so sind die Doppelpunkte der beiden homographischen Theilungen, durch welche man die beiden Durchschnittspunkte zu bestimmen sucht, imaginär, und alsdann hat man den Satz:

Es gibt zu beiden Seiten der Geraden A einen

$$\varrho e = \varrho O - (\sqrt{(CO)^2 - R^2}) \,.\, \sqrt{-1},$$

$$\varrho f = \varrho O + (\sqrt{(CO)^2 - R^2}) \,.\, \sqrt{-1},$$

woraus wieder folgt:

$$\varrho e \,.\, \varrho f = (\varrho O)^2 + (CO)^2 - R^2 = (\varrho C)^2 - R^2 = const.$$

Offenbar ist:

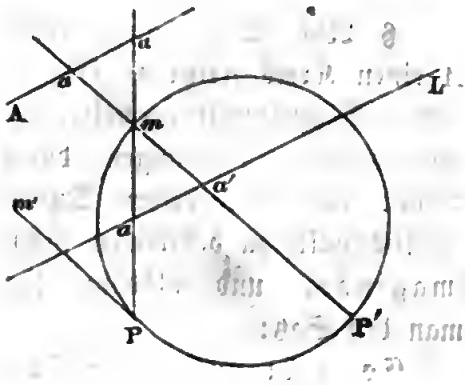
$\varrho O = \sqrt{(\varrho C)^2 - (CO)^2}$ und $Of = -Oe = \sqrt{(CO)^2 - R^2}$; wird also $CO = C\varrho$, so ist $\varrho O = 0$, der Punkt O fällt mit ϱ zusammen, und Of oder Oe erreicht seinen größten Werth $= \sqrt{(C\varrho)^2 - R^2} = \sqrt{\varrho e \,.\, \varrho f}$. —

Drehet sich die Sekante in demselben Sinne noch fort, so nimmt die gegenseitige Entfernung ef der beiden imaginären Durchschnittspunkte e, f wieder ab, bis sie wieder $= 0$ geworden ist, wenn die Sekante wieder Tangente wird, worauf sich die jetzt reellen, und folglich auf der Sekante selbst liegenden Durchschnittspunkte e, f immer weiter von einander entfernen, ꝛc.

Punkt, von welchem aus alle Segmente wie $\alpha\alpha'$ unter gleich großen Winkeln erscheinen, und zwar bleibt dieser Punkt stets derselbe, welche Lage die beiden festen Punkte P, P' auf dem Kreisumfange auch haben mögen (§. 111).

Denn das Quadrat des Abstandes des fraglichen Punktes von der Geraden A ist dem mit dem Zeichen — genommenen Quadrate des halben Segmentes zwischen den beiden Doppelpunkten, und folglich dem Quadrate der halben imaginären Sehne des Kreises auf der Geraden gleich (§. 111).

§. 291. Aufgabe. — Die imaginären Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer in unendlicher Entfernung liegenden Geraden zu bestimmen. —



Aufl. Die Strahlen Pm, $P'm$, welche sich um die beiden festen Punkte P, P' drehen und sich in einem beliebigen andern Punkte m des Kreises schneiden, treffen die Gerade in zwei Punkten a, a', welche in unendlicher Entfernung liegen und zwei homographische Theilungen bilden, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind. — Wenn man aber durch den Punkt P zu $P'm$ die Parallele Pm' zieht, so geht dieselbe durch den in unendlicher Entfernung liegenden Punkt a', so daß die beiden homographischen Theilungen durch die beiden Schenkel des Winkels mPm' gebildet werden. Dieser Winkel ist aber unveränderlich, und mithin bilden seine Schenkel bei der Drehung um die Spitze P zwei homographische Büschel, deren imaginäre Doppelstrahlen den Doppelpunkten der beiden in unendlicher Entfernung liegenden homographischen Theilungen entsprechen. — Man hat folglich den Satz:

Die Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer in unendlicher Entfernung liegenden Geraden liegen auf den Doppelstrahlen zweier homographischer Büschel, welche von den Schenkeln eines sich um seinen Scheitel drehenden Winkels von constanter Größe gebildet worden.

Der Winkel ändert sich, wenn sich der Punkt P' auf dem

Kreise verrückt, und folglich bleiben die Doppelstrahlen der von den beiden Schenkeln des Winkels gebildeten Büschel stets dieselben, welche Größe dieser Winkel auch haben mag, wie bereits in §. 111 direkt bewiesen ist. —

§. 292. Wenn man durch einen beliebigen Punkt zu den beiden Schenkeln des Winkels mPm' in einer seiner Lagen zwei Parallelen A, A' zieht, so gehen dieselben durch zwei homologe Punkte der beiden in unendlicher Entfernung liegenden homographische Theilungen. Man hat folglich den Satz:

Wenn man Winkel $(A, A'), (B, B'), (C, C') \ldots$ hat, welche alle dieselbe Größe haben, und in demselben Drehungssinne gebildet sind, aber eine beliebige Lage haben; so bestimmen ihre Schenkel auf der in unendlicher Entfernung liegenden Geraden zwei homographische Theilungen, deren imaginäre Doppelpunkte stets dieselben sind, welche gemeinschaftliche Größe diese Winkel auch haben mögen, und diese Doppelpunkte sind die Durchschnittspunkte eines beliebigen Kreises in der Ebene der Figur mit der in unendlicher Entfernung liegenden Geraden. —

In den Kreis beschriebene Vielecke.

§. 293. Es seien PA, $P'A$ und PB, $P'B$ zwei Paare fester homologer Strahlen, und Pm, $P'm$ zwei veränderliche homologe Strahlen; so wird die Homographie der in §. 286 betrachteten beiden Büschel durch die allgemeine Gleichheit:

$$\frac{\sin mPA}{\sin mPB} = \lambda \cdot \frac{\sin mP'A}{\sin mP'B}$$

ausgedrückt (§. 92); allein hier ist die Constante $\lambda = 1$, weil die beiden Winkel mPA, $mP'A$ gleich sind, oder der eine das Supplement des andern ist, so wie die Winkel mPB, $mP'B$. Die Gleichung ist also:

$$\frac{\sin mPA}{\sin mPB} = \frac{\sin mP'A}{\sin mP'A}.$$

Der erste Theil ist gleich dem Verhältniß der Abstände des

Punktes m von den beiden Geraden PA, PB, und der zweite Theil gleich dem Verhältniß der Abstände deſſelben Punktes von den beiden Geraden $P'A, P'B$, ſo daß man für das Viereck $PAP'B$ den Satz hat:

Für das in einen Kreis beſchriebene Viereck iſt das Produkt der Abſtände jedes Punktes des Kreiſes von den Gegenſeiten gleich dem Produkte der Abſtände deſſelben Punktes von den beiden andern Gegenſeiten.

Mann kann dieſen Satz auch auf ein beliebiges Vieleck von einer geraden Anzahl von Seiten erſtrecken, ſo daß man den Satz hat:

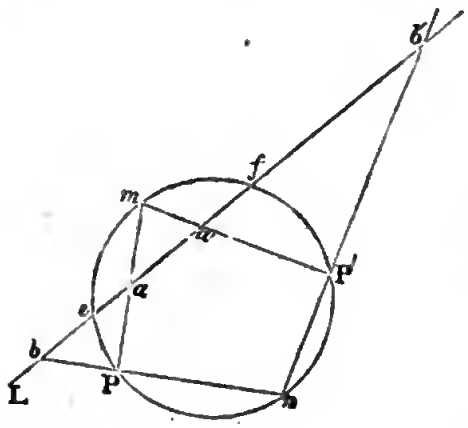
Wenn ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl in einen Kreis beſchrieben iſt, ſo iſt das Produkt der Abſtände eines beliebigen Punktes des Kreisumfanges von den Seiten von geradem Range gleich dem Produkte der Abſtände deſſelben Punktes von den Seiten ungeraden Ranges. —

Um dieſen Satz zu beweiſen, braucht man nur zu bemerken, daß derſelbe, wenn er für ein Vieleck von $2n$ Seiten ſtattfindet, auch für ein Vieleck von $2n+2$ Seiten gilt, weil ſich dieſes durch eine Diagonale in ein Vieleck von $2n$ Seiten und in ein Viereck zerlegen läßt, und die Gleichungen für dieſe beiden Figuren unmittelbar die für ein Vieleck von $2n+2$ Seiten geben. Wenn alſo der Satz für ein Viereck gilt, ſo gilt er auch für ein Sechseck, Achteck, ...

§. 294. Ein in einen Kreis beſchriebenes Vieleck kann als ein Vieleck angeſehen werden, welches in einem ſeiner Scheitel eine unendlich kleine, nach der Tangente in dieſem Punkte gerichtete Seite hat, und man kann folglich den letzten Satz auf ein beliebiges Vieleck erſtrecken, ſo daß man z. B. folgenden Lehrſatz hat:

Wenn man ein in und ein um einen Kreis beſchriebenes Vieleck betrachtet, indem die Spitzen des erſten die Berührungspunkte der Seiten des letztern ſind; ſo iſt das Produkt der Abſtände eines beliebigen Punktes des Kreisumfanges von den Seiten des erſten Vieleckes gleich

dem Produkte der Abstände desselben Punktes von den Seiten des zweiten Vieleckes. —



§. 295. Es sei $Pm\,P'n$ ein in einem Kreis beschriebenes Viereck und L eine Gerade, welche die Seitenpaare Pm, Pn; $P'm$, $P'n$ resp. in den Punkten a, b; a', b' und den Kreis in den beiden reellen, oder imaginären Punkten e, f schneidet; so sind e, f die Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen, wovon a, b; $a'b'$ zwei Paare homologer Punkte sind (§. 291), und folglich bilden die drei Punktepaare e, f; a, b'; a', b eine Involution (§. 128). Man hat also den Lehrsatz:

Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben ist, so schneidet eine beliebige Transversale die beiden Paare seiner Gegenseiten und den Kreis in sechs Punkten, welche eine Involution bilden.

Dieser Satz wird das Desargues'sche Involutionstheorem genannt, und läßt sich auch noch auf folgende Weise darthun: Die von den beiden Spitzen P, P' des Vierecks $Pm\,P'n$ nach den vier Punkten m, n; e, f des Kreises gezogenen Geraden bilden zwei Strahlenbüschel, welche dasselbe anharmonische Verhältniß haben (§. 286), und folglich haben auch die Durchschnittspunkte a, b, e, f und a', b', e, f dieser Büschel mit der Transversale einerlei anharmonisches Verhältniß, so daß man hat:

$$\frac{ea}{eb} : \frac{fa}{fb} = \frac{ea'}{eb'} : \frac{fa'}{fb'},$$

oder:

$$\frac{ea \,.\, eb'}{ea' \,.\, eb} = \frac{fa \,.\, fb'}{fa' \,.\, fb},$$

welches eine Involutionsgleichung mit acht Segmenten ist. Folglich ꝛc.

Bei diesem zweiten Beweise ist eigentlich erforderlich, daß die

beiden Punkte e, f imaginär sind, weil sie einzeln betrachtet werden (?), während diese Punkte bei dem ersten Beweise reell, oder imaginär sein können. —

Die letzte Gleichung kann auch auf ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl erstreckt werden, so daß man den Satz hat:

Wenn ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl in einen Kreis beschrieben ist, und man zieht eine Transversale, welche die Seiten von geradem Range in den Punkten $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und die Seiten von ungeradem Range in den Punkten $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$, sowie den Kreis in den beiden Punkten e, f schneidet; so hat man die Relation:

$$\frac{e\alpha \,.\, e\alpha', e\alpha'' \ldots}{e\mathfrak{G} \,.\, e\mathfrak{G}', e\mathfrak{G}'' \ldots} = \frac{f\alpha \,.\, f\alpha' \,.\, f\alpha'' \ldots}{f\mathfrak{G} \,.\, f\mathfrak{G}' : f\mathfrak{G}'' \ldots}.$$

Der Beweis wird wie in §. 293 geführt. —

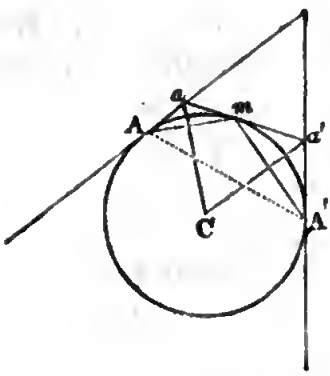
Eingeschriebenes Sechseck.

§. 296. Die von vier Punkten eines Kreises nach zwei andern Punkten desselben gezogenen Geraden bilden zwei Büschel, deren anharmonische Verhältnisse gleich sind (§. 286), und wenn man diese sechs Punkte als die Spitzen eines Sechseckes betrachtet; so hat man den Pascal'schen Lehrsatz (§. 243):

Wenn ein Sechseck in einen Kreis beschrieben ist, so liegen die drei Durchschnittspunkte seiner drei Paare Gegenseiten in gerader Linie. —

Anharmonisches Verhältniß von vier Tangenten.

§. 297. Wenn an einen Kreis zwei als fest betrachtete Tangenten und mehrere andere gezogen werden, so erscheinen die zwischen den beiden ersten liegenden Stücke der andern vom Mittelpunkte des Kreises aus unter Winkeln, welche einander gleich, oder Supplemente von einander sind. —



Denn es seien A, A' die Berührungspunkte der beiden festen Tangenten, und m der einer dritten $a\,a'$, so sind Ca, Ca' resp. auf $m\,A, m\,A'$ senkrecht, und der Winkel aCa' ist das Supplement von AmA'; aber alle Peripheriewinkel über der Sehne $A\,A'$ sind einander gleich, oder Supplemente von einander. Folglich ꝛc.

Wenn die beiden festen Tangenten parallel sind, so ist der Winkel aCa' ein rechter. Folglich erscheint der zwischen zwei parallelen Tangenten liegende Theil einer dritten Tangente vom Mittelpunkte des Kreises aus unter einem rechten Winkel. —

Hieraus folgt: Eine auf einem Kreise fortrollende Tangente trifft zwei feste Tangenten desselben in zwei Punkten, welche zwei homographische Theilungen bilden. —

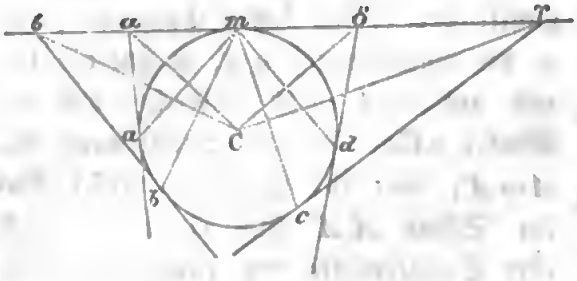
Denn da der Winkel aCa' derselbe bleibt, so bilden die beiden Strahlen Ca, Ca' zwei homographische Büschel, und folglich die beiden Punkte a, a' zwei homographische Theilungen. —

§. 298. Die von einem festen Punkte nach den beiden Reihen von Punkten a und a' gezogenen Geraden bilden zwei homographische Büschel, deren Doppelstrahlen offenbar die durch diesen Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten sind. Die Doppelstrahlen können aber imaginär sein; folglich auch die Tangenten, und hieraus erhellet, was unter zwei imaginären Tangenten eines Kreises zu verstehen ist (?). —

§ 299. Aus §. 297 folgt: Vier Tangenten eines Kreises werden von einer fünften in vier Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniß für jede Lage der fünften Tangente constant bleibt. — Diese constante Größe soll das anharmonische Verhältniß der vier festen Tangenten genannt werden.

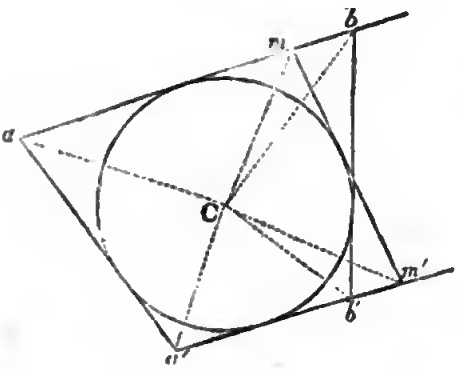
§. 300. Das anharmonische Verhältniß von vier Tangenten eines Kreises ist dem der vier Berührungspunkte gleich. —

Denn das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte a, b, c, d



iſt dem der von dieſen vier Punkten nach einem fünften Punkte m des Kreiſes gezogenen vier Geraden gleich (§. 286), und das anharmoniſche Verhältniß der vier Tangenten in den Punkten a, b, c, d iſt dem der vier Durchſchnittspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dieſer Tangenten mit einer beliebigen fünften Tangente gleich (§. 299). Das anharmoniſche Verhältniß der vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ iſt aber dem der vier Strahlen $C\alpha, C\beta, C\gamma, C\delta$ gleich, und da dieſe Strahlen reſp. auf den Geraden ma, mb, mc, md ſenkrecht ſind; ſo iſt ihr anharmoniſches Verhältniß dem der Geraden gleich, welches das der vier Punkte a, b, c, d ausdrückt, und mithin iſt dieſes Verhältniß dem der vier Tangenten gleich. — W. z. b. w.

Umſchriebene Vielecke.



§. 301. Es ſei $abb'a'$ ein um einen Kreis beſchriebenes Viereck, und mm' eine bewegliche Tangente, welche die Gegenſeiten ab, $a'b'$ in m, m' ſchneidet; ſo bilden dieſe beiden Punkte zwei homographiſche Theilungen (§. 297), und mithin hat man:

$$\frac{ma}{mb} = \lambda \cdot \frac{m'a'}{m'b'}. \quad (\S.\ 76.)$$

Das Verhältniß $\frac{ma}{mb}$ iſt aber gleich dem Verhältniß der Abſtände der Tangente mm' von den beiden Spitzen a, b des Vierecks, und $\frac{m'a'}{m'b'}$ iſt gleich dem Verhältniß der Abſtände derſelben Tangente

von den beiden andern Spitzen a', b' desselben. Die vorhergehende Gleichung drückt also folgenden Satz aus:

Wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, und eine Tangente rollt auf dem Kreise fort, so steht das Produkt ihrer Abstände von zwei Gegenspitzen des Viereckes zu dem Produkte ihrer Abstände von den beiden andern Gegenecken in einem constanten Verhältniß. —

Die Constante λ hat einen sehr einfachen geometrischen Ausdruck. Die Dreiecke Cam, Cbm geben:

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\sin mCa}{\sin mCb} \cdot \frac{Ca}{Cb},$$

und ebenso:

$$\frac{m'a'}{m'b'} = \frac{\sin m'Ca'}{\sin m'Cb'} \cdot \frac{Ca'}{Cb'}.$$

Nun haben aber die Winkel mCa, $m'Ca'$ einerlei Sinus, so wie die Winkel mCb, $m'Cb'$ (§. 297); folglich ist:

$$\frac{ma}{mb} : \frac{m'a'}{m'b'} = \frac{Ca}{Cb} : \frac{Ca'}{Cb'},$$

und folglich ist:

$$\lambda = \frac{Ca}{Cb} : \frac{Ca'}{Cb'} = \frac{Ca \cdot Cb'}{Cb \cdot Ca'};$$

d. h. die Constante λ ist gleich dem Quotienten aus dem Produkte der Abstände des Kreismittelpunktes C von zwei Gegenecken a, b' und dem Produkte der Abstände desselben Punktes von den beiden andern Gegenecken b, a'.—

§. 302. Der vorhergehende Lehrsatz kann auch auf ein beliebiges Vieleck von einer geraden Seitenzahl erstreckt werden, und ist:

Wenn ein Vieleck von einer geraden Seitenzahl um einen Kreis beschrieben ist, und man zieht eine beliebige Tangente an den Kreis; so steht das Produkt ihrer Abstände von den Vielecksspitzen geraden Ranges zu dem Produkte ihrer Abstände von den Spitzen ungeraden Ranges in einem constanten Verhältniß, welches gleich ist dem Quotienten aus dem Produkte der Abstände der Vielecksspitzen geraden Ranges vom Kreismittelpunkte und

dem Produkte der Abstände der Spitzen ungeraden Ranges von demselben Punkte. —

Der Beweis wird wie früher geführt (§. 293).

§. 303. Den Berührungspunkt einer Tangente kann man als die Spitze eines umschriebenen Winkels betrachten, dessen beide Schenkel unendlich wenig verschiedene Richtungen haben, so daß der Berührungspunkt der Seite eines umschriebenen Vieleckes als die Spitze eines Vieleckes von einer Ecke mehr betrachtet werden kann. Hiernach können die obigen Sätze auf umschriebene Vielecke von einer beliebigen Seitenzahl angewandt werden, und man hat z. B. den Lehrsatz:

Wenn ein Vieleck um einen Kreis beschrieben wird, so steht das Produkt der Abstände seiner Spitzen von einer beliebigen Tangente zu dem Produkte der Abstände der Berührungspunkte seiner Seiten von derselben Tangente in einem constanten Verhältniß. —

§. 304. Die Tangenten an einem Kreise schneiden zwei feste Tangenten L, L' in Punkten $a, b, \ldots$ und $a', b', \ldots$ welche zwei homographische Theilungen bilden (§ 297), und die von demselben Punkte P nach diesen Punkten gezogenen Geraden $Pa, Pb, \ldots$ und $Pa', Pb', \ldots$ bilden zwei homographische Büschel, deren Doppelstrahlen die durch den Punkt P an den Kreis gezogenen Tangenten sind (§. 298). Diese Doppelstrahlen bilden aber mit Pa, Pb' und Pb, Pa' ein Involutionsbüschel (§. 128). Man hat folglich für das umschriebene Viereck $a\,b\,b'\,a'$ den Satz:

Die von einem Punkte nach den Gegenspitzen eines umschriebenen Viereckes gezogenen Geraden und die von demselben Punkte an den Kreis gezogenen beiden Tangenten bilden ein Involutionsbüschel.

Es ist wohl zu bemerken: daß der obige Beweis auch in dem Falle gilt, wo die beiden Tangenten imaginär sind. —

Wenn E, F diese beiden reellen, oder imaginären Tangenten, α, α' die nach zwei Gegenspitzen und ϵ, ϵ' die nach den beiden andern Gegenecken gezogenen Geraden bezeichnen; so hat man unter andern die folgende Involutionsgleichung:

$$\frac{\sin(E,\alpha)\,.\,\sin(E,\alpha')}{\sin(E,\epsilon)\,.\,\sin(E,\epsilon')} = \frac{\sin(F,\alpha)\,.\,\sin(F,\alpha')}{\sin(F,\epsilon)\,.\,\sin(F,\epsilon')}\,.$$

§. 305. Dieſe Gleichung kann auf ein umſchriebenes Vieleck von einer geraden Seiten- oder Eckenzahl ausgedehnt werden; d. h.: wenn E, F die von einem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten, $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \ldots$ die von demſelben Punkte reſp. nach den Ecken geraden und ungeraden Ranges gezogenen Geraden bezeichnen; ſo hat man die Relation:

$$\frac{\sin(E,\alpha).\sin(E,\alpha').\sin(E,\alpha'')\ \ldots.}{\sin(E,\mathfrak{E}).\sin(E,\mathfrak{E}').\sin(E,\mathfrak{E}'')\ \ldots.} = \frac{\sin(F,\alpha).\sin(F,\alpha')\sin(F,\alpha'')\ \ldots.}{\sin(F,\mathfrak{E}).\sin(F,\mathfrak{E}')\sin(F,\mathfrak{E}'')\ \ldots.}.$$

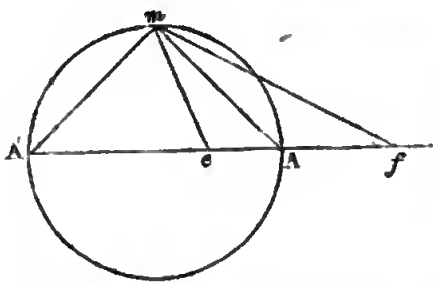
Der Beweis wird wie in §. 293 geführt, und die Bemerkung in §. 303 iſt auch hier anwendbar. —

Umſchriebenes Sechseck.

§. 306. Vier Tangenten an einem Kreiſe ſchneiden zwei andere Tangenten in zwei Syſtemen von vier Punkten, welche gleiche anharmoniſche Verhältniſſe haben (§. 299), und wenn man dieſe ſechs Tangenten als ein umſchriebenes Sechseck bildend betrachtet; ſo hat man nach §. 241 den folgenden Brianchon'ſchen Lehrſatz:

In jedem umſchriebenen Sechseck gehen die drei Diagonalen, welche zwei Gegenſpitzen verbinden, durch denſelben Punkt. —

Verſchiedene Eigenſchaften.



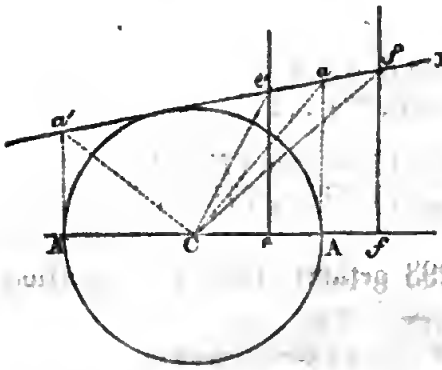
§. 307. Wenn die beiden Punkte e, f den Durchmeſſer AA' eines Kreiſes harmoniſch theilen, ſo ſtehen die Entfernungen jedes Punktes m des Kreiſes von dieſen beiden feſten Punkten in einem conſtanten Verhältniß. —

Denn in den beiden Dreiecken emA, fmA hat man:

$$\frac{em}{eA} = \frac{\sin A}{\sin emA}, \quad \frac{fm}{fA} = \frac{\sin A}{\sin fmA},$$

und da nach §. 52 der Winkel $emA = fmA$ ist; so folgt hieraus:

$$\frac{em}{eA} = \frac{fm}{fA} \text{ oder } \frac{me}{mf} = \frac{Ae}{Af} = const.$$



§. 308. Wenn man in den beiden Punkten e, f, welche den Durchmesser AA' eines Kreises harmonisch theilen, Perpendikel errichtet; so schneidet jede Tangente L dieselben in zwei Punkten e', f' von solcher Beschaffenheit: daß die von dem Mittelpunkte C des Kreises nach diesen beiden Punkten gezogenen Geraden mit der Geraden Ca gleiche Winkel bilden, welche vom Mittelpunkte C nach dem Durchschnittspunkte a der Tangente L und der in einem Endpunkte A des Durchmessers gezogenen Tangente geht. —

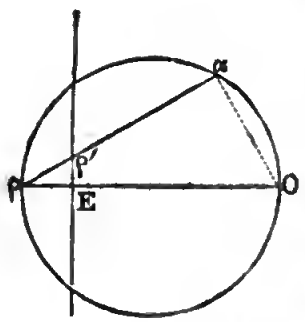
Denn die beiden Geraden Ca, Ca' bilden mit Ce', Cf' ein harmonisches Büschel; aber jene sind aufeinander senkrecht (§. 297), und folglich bildet jede derselben mit Ce', Cf' gleiche Winkel (§. 52).

Hieraus folgt weiter, daß:

$$\frac{Ce'}{Cf'} = \frac{Ae}{Af} = const.$$

ist. — Denn da die Gerade Ca den Winkel $e'Cf'$ halbirt, so ist $\frac{Ce'}{Cf} = \frac{ae'}{af}$; aber auch $\frac{ae'}{af} = \frac{Ae}{Af}$; also $\frac{Ce'}{Cf} = \frac{Ae}{Af} = const.$ —

§. 309. Wenn man auf den von demselben Punkte ϱ ausgehenden Sehnen eines Kreises Stücke $\varrho\varrho'$ abschneidet, welche sich umgekehrt wie diese Sehnen verhalten, so ist der Ort der Punkte ϱ' eine auf dem durch den

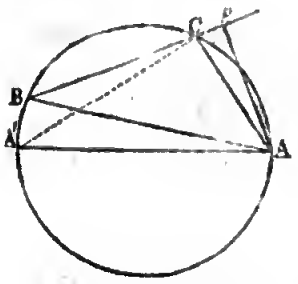


Punkt ρ gehenden Durchmesser senkrechte Gerade.

Denn nach der Voraussetzung hat man $\rho\rho' = \frac{\lambda}{\rho\alpha}$, wo λ eine Constante ist, und wenn man auf dem Durchmesser ρO das Segment $\rho E = \frac{\lambda}{\rho O}$ nimmt; so hat man:

$$\rho\rho' \cdot \rho\alpha = \rho E \cdot \rho O \text{ oder } \frac{\rho\rho'}{\rho E} = \frac{\rho O}{\rho\alpha},$$

was zeigt, daß die beiden Dreiecke $\rho E\rho', \rho\alpha O$, welche den gemeinschaftlichen Winkel ρ haben, einander ähnlich sind, und daß folglich das erste in E rechtwinklig ist. Folglich ist das in E auf dem Durchmesser ρO errichtete Perpendikel der Ort der Punkte ρ; w. b. w. f.



§. 310. Wenn ein Dreieck ABC in einen Kreis beschrieben ist, so ist das Produkt $AB \cdot AC$ zweier Seiten gleich dem Produkte $Ap \cdot AA'$ aus dem auf die dritte Seite von der Gegenecke gefällten Perpendikel Ap und dem Durchmesser AA' des Kreises.

Denn die beiden rechtwinkligen Dreiecke BAp und $A'AC$ sind ähnlich, weil ihre Winkel in B und A gleich sind, so daß man hat:

$$\frac{AB}{Ap} = \frac{AA'}{AC} \text{ oder } AB \cdot AC = Ap \cdot AA'.$$

Hieraus folgt:

$$AB \cdot BC \cdot CA = Ap \cdot BC \cdot AA'.$$

oder:

$$a \cdot b \cdot c = 4r \cdot S$$

folglich:

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{abc}{r^3},$$

wo a, b, c, S, r resp. die drei Seiten des Dreieckes, S seine Fläche und r den Halbmesser des umschriebenen Kreises bedeuten. —

Wenn man die sich auf die Sehne BC beziehende Gleichung:

$$Ap \,.\, AA' = AB \,.\, AC$$

auf die successiven Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Vieleckes von gerader Seitenzahl anwendet, so erhält man den Satz in §. 293. —

§. 311. Wenn ABC ein in der Ebene eines Kreises beschriebenes Dreieck ist, und man zieht von den Spitzen desselben die Tangenten Aa, Aa'; Bb, Bb'; Cc, Cc'; so hat man zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese reellen, oder imaginären Tangenten mit den Seiten des Dreieckes bilden, die Relation:

$$(\alpha)\quad \frac{\sin aAB \,.\, \sin a'AB}{\sin aAC \,.\, \sin a'AC} \cdot \frac{\sin cCA \,.\, \sin c'CA}{\sin cCB \,.\, \sin c'CB} \cdot \frac{\sin bBC \,.\, \sin b'BC}{\sin bBA \,.\, \sin b'BA} = 1.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß die beiden Spitzen B, C des Dreieckes außerhalb des Kreises liegen, während die Spitze A innerhalb, oder außerhalb desselben liegen kann, und es sei D der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten Bb, Cc; so geben die von D nach den drei Spitzen des Dreieckes gezogenen Geraden die Relation:

$$(\beta)\quad \frac{\sin bBC}{\sin bBA} \cdot \frac{\sin cCA}{\sin cCB} \cdot \frac{\sin DAB}{\sin DAC} = -1. \text{ (§. 204).}$$

Ebenso hat man für den Durschnittspunkt D' der beiden Tangenten Bb', Cc':

$$(\gamma)\quad \frac{\sin b'BC}{\sin b'BA} \cdot \frac{\sin c'CA}{\sin c'CB} \cdot \frac{\sin D'AB}{\sin D'AC} = -1.$$

Die vier Tangenten Bb, Bb', Cc, Cc' bilden aber ein umschriebenes Viereck $BDCD'$, und die von dem Punkte A nach den vier Spitzen desselben gezogenen Geraden bilden nebst den beiden reellen, oder imaginären Tangente Aa, Aa' eine Involution (§. 304), so daß man die Gleichung hat:

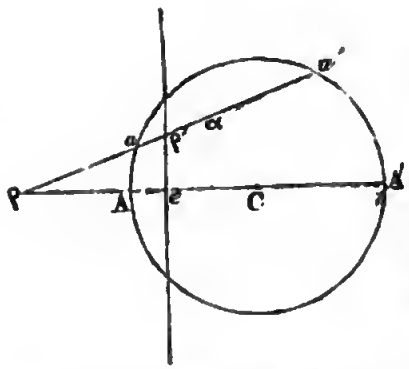
$$(\delta)\quad \frac{\sin BAD \,.\, \sin BAD'}{\sin CAD \,.\, \sin CAD'} = \frac{\sin BAa \,.\, \sin BAa'}{\sin CAa \,.\, \sin CAa'}.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichheiten (β), (γ) in einander und beachtet die Gleichung (δ), so erhält man die Relation (α).

Nehmen wir nun an, daß zwei Dreiecksspitzen A, B innerhalb und eine C außerhalb des Kreises liegen. — Wenn man auf der verlängerten Seite AB einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt B' annimmt, und die Gerade $B'C$ zieht; so erhält man die beiden Dreiecke $B'AC, B'BC$, wovon jedes nur eine Spitze innerhalb des Kreises hat. Auf jedes derselben ist also der Satz anwendbar, und aus den sich darauf beziehenden Gleichheiten ergibt sich ganz einfach die Relation (α) für den Fall, wo zwei Spitzen des Dreieckes ABC innerhalb des Kreises liegen. —

Wenn endlich alle drei Spitzen des Dreieckes ABC innerhalb des Kreises liegen, so nimmt man auf der Verlängerung von einer Seite, z. B. von AC, einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt C' an, und zieht BC'. Hierdurch erhält man zwei Dreiecke $C'BA, C'BC$, auf welche der Satz anwendbar ist, weil jedes nur zwei Spitzen innerhalb des Kreises hat, und aus den sich auf diese beiden Dreiecke beziehenden Gleichungen ergibt sich die Relation (α) für das Dreieck ABC. — Der Lehrsatz ist also vollständig bewiesen, welche Lage die drei Dreiecksspitzen gegen den Kreis auch haben mögen. —

Pole und Polaren am Kreise.



§. 312. Wenn man in der Ebene eines Kreises eine Transversale sich um einen festen Punkt ϱ drehen läßt, und man bestimmt den harmonisch conjugirten Punkt ϱ' von ϱ in Beziehung auf die beiden Durchschnittspunkte a, a' mit dem Kreise; so ist der Ort des Punktes ϱ' eine Gerade. —

Denn es sei α die Mitte der beiden Durchschnittspunkte a, a', so ist:

$$\varrho a \,.\, \varrho a' = \varrho \varrho' \,.\, \varrho \alpha, \quad (\S.\ 45)$$

und:

$$\varrho a \,.\, \varrho a' = \varrho A \,.\, \varrho A' = const.$$

folglich:

$$\varrho\varrho' \cdot \varrho\alpha = \varrho A \cdot \varrho A'; \quad \varrho\varrho' = \frac{\varrho A \cdot \varrho A'}{\varrho\alpha} = \frac{\lambda}{\varrho\alpha};$$

d. h. $\varrho\varrho'$ steht im umgekehrten Verhältniß von $\varrho\alpha$. Aber der Punkt α liegt auf einem Kreise, der durch den Punkt ϱ geht (§. 289), und mithin liegt der Punkt ϱ' auf einer Geraden (§. 309).

Diese Gerade heißt die Polare des Punktes ϱ in Bezug auf den Kreis, und umgekehrt dieser Punkt der Pol der Geraden.

Diese Polare ist senkrecht auf dem durch den Pol ϱ gehenden Durchmesser, und der Punkt e, worin sie diesen Durchmesser schneidet, kann durch die Relation:

$$Ce \cdot C\varrho = (CA)^2 = R^2 \qquad (\S.\ 44)$$

bestimmt werden, wo R den Halbmesser des Kreises bedeutet. —

Wenn die durch den Punkt ϱ gezogene Gerade den Kreis nicht schneidet, so sind die beiden Punkte α, α' imaginär; aber ihre Mitte α ist stets reell (§. 283), so daß der Punkt ϱ' noch durch dieselbe Gleichung:

$$\varrho\varrho' = \frac{\varrho A \cdot \varrho A'}{\varrho\alpha},$$

oder durch:

$$\alpha\varrho \cdot \alpha\varrho' = (\alpha\alpha)^2$$

bestimmt wird (§. 45), worin man nach § 289 für $(\alpha\alpha)^2$ den Werth $R^2 - (\alpha C)^2$ setzen kann, wodurch man erhält:

$$\alpha\varrho \cdot \alpha\varrho' = R^2 - (\alpha C)^2.$$

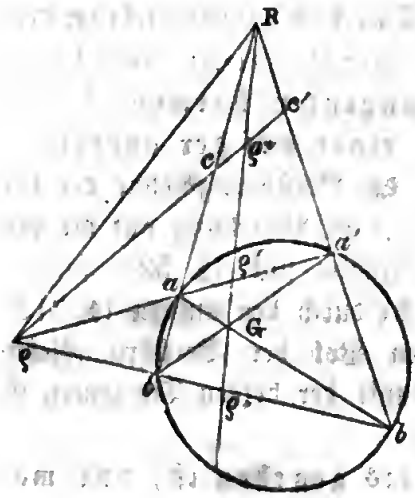
Diese Relation zeigt: daß die beiden Punkte ϱ, ϱ' auf derselben Seite von α, oder auf verschiedenen Seiten liegen, jenachdem $R^2 - (\alpha C)^2$ positiv, oder negativ ist; d. h. jenachdem die Transversale den Kreis in zwei reellen, oder imaginären Punkten trifft. —

Es verdient noch bemerkt zu werden: daß diese verschiedenen Relationen dazu dienen können, die Polare eines Punktes zu construiren, ohne daß der Kreis beschrieben ist, weil nur der Mittelpunkt und das Quadrat des Halbmessers gebraucht wird. —

§. 313. Die Polaren der verschiedenen Punkte einer Geraden gehen alle durch den Pol dieser Geraden.

Denn da die beiden Punkte ϱ, ϱ', wovon der zweite auf der Polare des ersten liegt, in Bezug auf a, a' harmonisch conjugirt sind; so geht die Polare des Punktes ϱ' durch den Punkt ϱ. (§. 312).

§. 314. Wenn man durch denselben Punkt ϱ zwei Transversalen $\varrho aa', \varrho bb'$ zieht, so liegt der Durchschnittspunkt der beiden Geraden $ab, a'b'$ und der der beiden Geraden $ab', a'b$ auf der Polare des Punktes ϱ. —



Denn es seien ϱ', ϱ'' die Punkte der Polare auf den beiden Transversalen, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\frac{\varrho a}{\varrho a'} : \frac{\varrho' a}{\varrho' a'} = -1,$$

$$\frac{\varrho b}{\varrho b'} : \frac{\varrho'' b}{\varrho'' b'} = -1;$$

folglich:

$$\frac{\varrho a}{\varrho a'} : \frac{\varrho' a}{\varrho' a'} = \frac{\varrho b}{\varrho b'} : \frac{\varrho'' b}{\varrho'' b'}.$$

Es ist also das anharmonische Verhältniß der vier Punkte ϱ, a, ϱ', a' dem der vier Punkte $\varrho, b, \varrho'', b'$ gleich; folglich gehen die drei Geraden $ab, \varrho'\varrho'', a'b'$ durch denselben Punkt (§. 25), d. h. die beiden Geraden $ab, a'b'$ schneiden sich auf der Geraden $\varrho'\varrho''$. — Da nun die beiden Punkte b, b' in der zweiten Gleichheit auf gleiche Weise vorkommen, so kann man den einen für den andern setzen, so daß das, was für die beiden Geraden $ab, a'b'$ bewiesen ist, auch von den beiden Geraden $ab', a'b$ gilt. — Folglich ꝛc.

§. 315. Wenn sich die beiden Transversalen $\varrho aa', \varrho bb'$ einander unendlich nähern, so schneiden sich die Sehnen $ab, a'b'$ noch immer auf der Polare des Punktes ϱ, und werden die Tangenten in a und a'. Man hat also den Satz:

Wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt drehet, so durchschneiden sich die Tangenten in den Durchschnitts-

punkten mit dem Kreiſe auf der Polare des feſten Punktes. —

Oder mit andern Worten: Die Polare eines Punktes iſt der Ort der Spitzen der umſchriebenen Winkel, deren Berührungsſehnen durch dieſen Punkt gehen. —

Und umgekehrt: Der Pol einer Geraden iſt ein Punkt, durch welchen alle Berührungsſehnen der umſchriebenen Winkel gehen, deren Spitzen auf der Geraden liegen. —

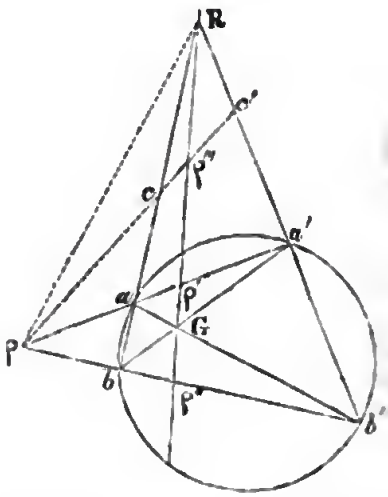
§. 316. Wenn man durch den Durchſchnittspunkt zweier Tangenten eines Kreiſes zwei Gerade zieht, welche in Beziehung auf dieſe beiden Tangenten harmoniſch conjugirt ſind; ſo liegt der Pol der einen auf der andern. —

Denn die beiden Geraden treffen die Berührungsſehne der beiden Tangenten in zwei Punkten, welche in Beziehung auf die beiden Berührungspunkte harmoniſch conjugirt ſind (§. 52); folglich geht die Polare des einen dieſer Punkte durch den andern (§. 312); aber dieſe Polaren gehen durch den Pol der Berührungsſehne (§. 313), welches der Durchſchnittspunkt der beiden Tangenten iſt. Folglich ꝛc.

Hieraus folgt: Wenn ein Kreis gegeben iſt, und man zieht durch jeden Punkt einer feſten Geraden eine zweite, welche die harmoniſch conjugirte der erſten in Bezug auf die von dieſem Punkte ausgehenden Tangenten iſt; ſo geht dieſe Gerade ſtets durch denſelben Punkt, welcher der Pol der feſten Geraden iſt. —

§. 317. Die vorhergehenden Lehrſätze beziehen ſich theils auf Punkte und theils auf Gerade, ſo daß ſie einander gegenſeitig entſprechen, wie ſolches bei den meiſten der in dieſem Buche enthaltenen Sätze der Fall iſt. — So entſpricht z. B. dem letzten Satze, wonach man den Pol einer Geraden beſtimmt, der Satz in §. 312, wodurch man die Polare eines Punktes conſtruirt. Wir haben jedoch von dieſer gegenſeitigen Abhängigkeit hier keinen Gebrauch gemacht, um unſern Gegenſtand möglichſt elementar und direkt zu behandeln, und werden auch ferner dieſen Gang beibehalten, welcher ſo ſehr dazu geeignet iſt, den unterſcheidenden Charakter der verſchiedenen Sätze zu bezeichnen, ſie in einer natürlichen Ordnung

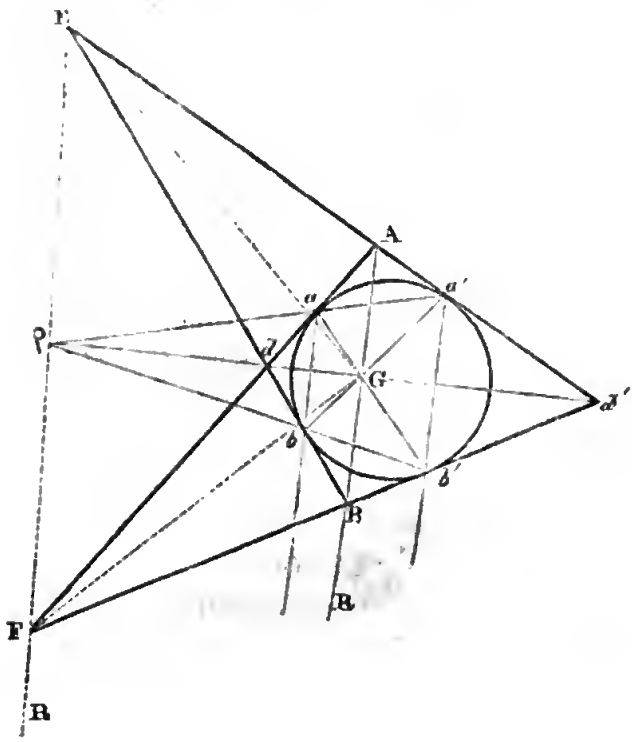
zu verbinden und über das Ganze das gehörige Licht zu verbreiten. —



§. 318. Zwei von demſelben Punkte ϱ ausgehende Transverſalen $\varrho a a'$, $\varrho b b'$ beſtimmen ein eingeſchriebenes Viereck $a a' b b'$, und eine dritte, von demſelben Punkte ϱ ausgehende Transverſale trifft die beiden Gegenſeiten ab, $a'b'$ in zwei Punkten c, c' und den Kreis in zwei reellen, oder imaginären Punkten ε, φ, welche eine Involution bilden, wovon ϱ ein Doppelpunkt iſt (§. 295). Die Gerade RG, welche den Durchſchnittspunkt der beiden Gegenſeiten ab, $a'b'$ mit dem der beiden Diagonalen ab', $a'b$ vereinbet, und die Gerade $R\varrho$ theilen den Winkel der beiden Geraden ab, $a'b'$ harmoniſch (§. 196); folglich trifft die Transverſale die Gerade RG in einem Punkte ϱ''', welcher der harmoniſch conjugirte von ϱ in Bezug auf c, c' iſt. — Dieſer Punkt ϱ''' iſt mithin der zweite Doppelpunkt der Involution (§. 127), und folglich ſind die beiden Punkte ϱ, ϱ''' in Beziehung auf die beiden Punkte ε, φ, des Kreiſes harmoniſch conjugirt. —

Hieraus ergibt ſich zugleich der Beweis der beiden Lehrſätze in §. 312 und §. 314 in Beziehung auf die Polare eines Punktes. —

§. 319 Es ſei $AEBF$ (Fig. S. 290) ein umſchriebenes Viereck, deſſen Gegenſpitzen A, B und E, F ſind. Wenn man von einem beliebigen Punkte m der Geraden EF die beiden Geraden mA, mB und die beiden reellen, oder imaginären Tangenten $m\varepsilon$, $m\varphi$ an den Kreis zieht, ſo bilden dieſe vier Geraden mit EF ein Involutionsbüſchel, worin EF einer der Doppelſtrahlen iſt (§. 304). Aber die Gerade AB wird von dd' und EF in G und R harmoniſch getheilt (§. 193); folglich ſind mG, mE in Bezug auf mA, mB harmoniſch conjugirt; mithin iſt mG der zweite Doppelſtrahl des Involutionsbüſchels, und folglich ſind mG, mE in Beziehung auf die beiden vom Punkte m ausgehenden Tangenten harmoniſch



conjugirt. Nun ist aber einerseits der Punkt G, durch welchen diese Gerade geht, fest, welche Lage der Punkt m auch haben mag, weil derselbe der Durchschnittspunkt der Diagonalen des umschriebenen Viereckes $AdBd'$ ist; und andererseits, wenn der Punkt m in unendliche Entfernung rückt, in welchem Falle die beiden Tangenten zu EF parallel werden; so theilen der Punkt G und die Gerade EF den auf dieser Geraden senkrechten Durchmesser harmonisch, woraus erhellet: daß der Punkt G der Pol der Geraden EF ist (§. 312). Man hat also den ersten Satz:

Wenn man von jedem Punkte einer festen Geraden zwei Tangenten an einen Kreis zieht, und die Gerade, welche nebst der festen Geraden den Winkel der beiden reellen, oder imaginären Tangenten harmonisch theilt; so geht diese Gerade stets durch denselben Punkt, welcher der Pol der festen Geraden ist. —

Dieser Satz ist von dem zweiten in §. 316 nicht verschieden; aber hier können die beiden Tangenten imaginär sein, während sie

bei dem Beweiſe des erſten Lehrſatzes in §. 316 als reell vorausgeſetzt wurden.

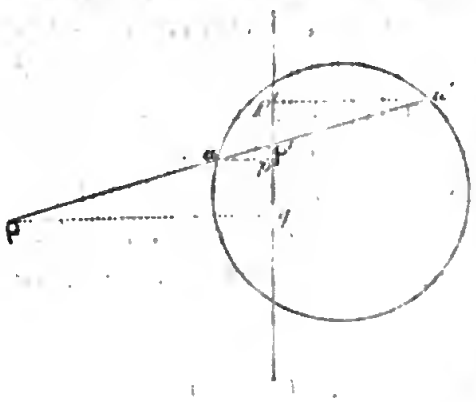
Bemerkt man ferner, daß der feſte Punkt, welcher durch die von den verſchiedenen Punkten der feſten Geraden gezogenen Geraden beſtimmt wird, von der Lage der auf dieſer Geraden betrachteten beiden Punkte E, F unabhängig iſt; ſo hat man den zweiten Satz:

Wenn man von zwei Punkten einer feſten Geraden Tangenten an einen Kreis zieht, ſo gehen die Diagonalen des dadurch gebildeten Viereckes durch einen feſten Punkt, welcher der Pol der Geraden iſt, was für eine Lage die beiden auf dieſer Gerade genommenen Punkte auch haben mögen.

Wenn ſich die beiden Punkte einander unendlich nähern, ſo nähern ſich die beiden Diagonalen einander ebenfalls unendlich und fallen zuletzt nach der Berührungsſehne der beiden Tangenten zuſammen, ſo daß man den Satz hat:

Wenn der Scheitel eines umſchriebenen Winkels auf einer Geraden fortrückt, ſo geht die Berührungsſehne ſtets durch einen feſten Punkt, welcher der Pol dieſer Geraden iſt. —

§. 320. Wenn ſich eine Sehne eines Kreiſes um einen feſten Punkt drehet, ſo bleibt die algebraiſche Summe der reciproken Werthe der Abſtände ihrer Endpunkte von der Polare dieſes Punktes conſtant. —



Es ſei aa' die ſich um den feſten Punkt ϱ drehende Sehne, und ϱ' der Punkt, wo ſie die Polare dieſes Punktes trifft; ſo hat man:

$$\frac{2}{\varrho'\varrho} = \frac{1}{\varrho' a} + \frac{1}{\varrho' a'}. \quad (\text{§. 37})$$

Nun ſind aber die drei Segmente $\varrho' a, \varrho' a', \varrho'\varrho$ den Abſtänden $ap, a'p', \varrho q$ der drei Punkte a, a', ϱ von der Polare proportional, und folglich geht die letzte Gleichung durch Subſtitution letzterer für erſtere in folgende über:

$$\frac{1}{ap}+\frac{1}{a'p'}=\frac{2}{\varrho q}=\textit{const.}\ \text{w. z. b. w.}$$

In dieſer Gleichung hängen die Zeichen der Perpendikel von ihrer Richtung, von den Punkten a, a' aus genommen, ab. — Wenn z. B. der Punkt ϱ, wie in der Figur, außerhalb des Kreiſes liegt; ſo haben die beiden Perpendikel $ap, a'p'$ entgegengeſetzte Zeichen. Wenn aber der Punkt ϱ innerhalb des Kreiſes läge, ſo hätten ſie daſſelbe Zeichen. —

§. 321. Der letzte Lehrſatz kann auch auf folgende Weiſe verallgemeinert werden: Wenn ſich eine Sehne eines Kreiſes um einen feſten Punkt drehet, ſo haben die Quotienten aus den Abſtänden ihrer Endpunkte von einer beliebigen feſten Axe und aus den Abſtänden derſelben Punkte von der Polare des feſten Punktes eine conſtante Summe. —

Denn es ſeien $aP, a'P', \varrho Q$ die von den drei Punkten a, a', ϱ auf die feſte Axe gefällten Perpendikel, ſo hat man die Gleichung:

$$2\frac{\varrho Q}{\varrho'\varrho}=\frac{aP}{\varrho' a}+\frac{a'P'}{\varrho' a'},\ (\text{§. 40})$$

und folglich wie oben:

$$\frac{aP}{ap}+\frac{a'P'}{a'p'}=2\,.\,\frac{\varrho Q}{\varrho q},\ \text{w. z. b. w.}$$

§. 322. Wenn man von irgend einem Punkte einer Geraden zwei Tangenten an einen Kreis zieht, ſo iſt die Summe der Quotienten aus den Abſtänden der beiden Tangenten von einem beliebigen feſten Punkte und ihren Abſtänden von dem Pole der Geraden conſtant. —

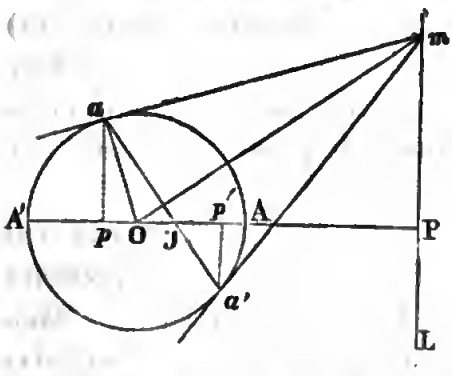
Denn es ſeien ϱ der Pol der Geraden, m der feſte Punkt und a, a', ϱ' die Durchſchnittspunkte der Geraden ϱm mit den beiden Tangenten und der Polare des Punktes ϱ; ſo hat man die Gleichung:

$$2\,\frac{m\varrho'}{\varrho\varrho'}=\frac{ma}{\varrho a}+\frac{ma'}{\varrho a'}.\ (\text{§. 39.})$$

Die drei Verhältniſſe $\frac{ma}{\varrho a}$, $\frac{ma'}{\varrho a'}$, $\frac{m\varrho'}{\varrho\varrho'}$ ſind aber reſp.

den Verhältniſſen der Abſtände der beiden Tangenten und der feſten Geraden von den beiden Punkten m, ϱ gleich. Folglich ꝛc.

§. 323. Wenn man von jedem Punkte m einer feſten Geraden L zwei Tangenten, an einen Kreis zieht, ſo ſteht das Produkt der Sinus der Winkel, welche dieſe mit jener bilden, zu dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen die von dem Punkte m nach dem Mittelpunkte O des Kreiſes gehende Gerade mit der Geraden L macht, in einem conſtanten Verhältniß.—



Denn man hat:

$$\sin amL = \sin aOp = \frac{ap}{R} = \frac{aJ \sin J}{R} = \frac{aJ}{R} \sin OmL$$

und ebenſo:

$$\sin a'mL = \frac{a'J}{R} \sin OmL;$$

folglich:

$$\sin amL \,.\, \sin a'mL = \frac{aJ \,.\, a'J}{R^2} \sin^2 OmL,$$

$$= \frac{JA \,.\, JA'}{R^2} \sin^2 OmL,$$

und:

$$\frac{\sin amL \,.\, \sin a'mL}{\sin^2 OmL} = \frac{JA \,.\, JA'}{R^2} = const.$$ w. z. b. w.

Man kann auch ſchreiben:

$$\sin amL \,.\, \sin a'mL = \frac{JA \,.\, JA'}{R^2} \,.\, \frac{(OP)^2}{(Om)^2},$$

woraus erhellet: daß das Produkt der Sinus der beiden Winkel im umgekehrten Verhältniß der Entfernung des Punktes m vom Mittelpunkte des Kreiſes ſteht. —

§. 324. Conjugirte Punkte in Beziehung auf einen Kreis sollen zwei Punkte von solcher Beschaffenheit genannt werden: daß die Polare des einen durch den andern geht. — Wenn nämlich die Polare eines Punktes durch einen andern Punkt geht, so geht auch umgekehrt die Polare des letztern durch den erstern (§. 313). Man kann auch sagen: daß zwei conjugirte Punkte zwei harmonisch conjugirte Punkte sind in Bezug auf die beiden reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte des Kreises mit der durch diese Punkte gehenden Geraden (§. 312).

Ebenso sollen unter conjugirten Geraden in Bezug auf einen Kreis zwei Gerade verstanden werden, welche so beschaffen sind: daß der Pol der einen auf der andern liegt. — Man kann auch sagen: daß die beiden Geraden harmonisch conjugirt sind in Bezug auf die beiden reellen, oder imaginären Tangenten, welche von ihrem Durchschnittspunkt an den Kreis gezogen sind (§. 316).

§. 325. Weil zwei auf einer beliebigen Geraden genommene conjugirte Punkte zwei in Beziehung auf die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der Geraden mit dem Kreise harmonisch conjugirte Punkte sind; so folgt:

Drei auf derselben Geraden genommene Paare conjugirter Punkte bilden eine **Involution** von sechs Punkten, deren **Doppelpunkte** die Durchschnittspunkte des Kreises mit der Geraden sind. —

Ebenso: Drei durch denselben Punkt gezogene Paare conjugirter Geraden bilden ein sechsstrahliges Involutionsbüschel, dessen Doppelstrahlen die von diesem Punkte an den Kreis gezogenen beiden Tangenten sind.

§. 326. Hiernach kann man also die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Geraden bestimmen, wenn man auf dieser zwei Paare conjugirter Punkte nimmt; denn die Doppelpunkte der durch diese vier Punkte bestimmten Involution, oder die harmonisch conjugirten Punkte, sind die gesuchten Durchschnittspunkte. —

Ebenso kann man die von einem gegebenen Punkte an einen Kreis gehenden Tangenten bestimmen, wenn man durch diesen Punkt

zwei Paare conjugirter Geraden zieht, weil die Doppelstrahlen des dadurch bestimmten Involutionsbüschels, oder die harmonisch conjugirten Geraden die verlangten reellen, oder imaginären Tangenten sind. —

§. 327. Das anharmonische Verhältniß von vier in gerader Linie liegenden Punkten ist dem ihrer Polaren gleich. — Denn das anharmonische Verhältniß von vier auf derselben Geraden genommenen Punkten a, b, c, d ist dem ihrer conjugirten Punkte a', b', c', d' gleich, weil diese Punkte zwei homographische Theilungen bilden (§. 325). Nun liegen aber a', b', c', d' resp. auf den Polaren der Punkte a, b, c, d (§. 324). welche durch denselben Punkt gehen (§. 313); folglich ist das anharmonische Verhältniß von a', b', c', d' dem dieser Polaren gleich, welches letztere mithin dem der vier Punkte a, b, c, d gleich ist. —

Hieraus folgt: Wenn man auf zwei Geraden zwei homographische Theilungen hat, so bilden die Polaren der Theilungspunkte zwei homographische Strahlenbüschel.

§. 328. Es sei $AdBd'$ (Fig. S. 290) ein um einen Kreis beschriebenes Viereck, so durchschneiden sich die Verbindungsgeraden $a'b, ab'$ der Berührungspunkte der Gegenseiten auf der Diagonale AB, weil die beiden Spitzen A, B und der Durchschnittspunkt der beiden Geraden $ab', a'b$ drei Punkte sind, welche auf der Polare des Durchschnittspunktes der beiden Geraden aa', bb' liegen (§§. 314 und 315). Aus demselben Grunde liegt der Durchschnittspunkt der beiden Geraden $ab', a'b$ auch auf der zweiten Diagonale dd'. Man hat also den Satz:

Wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, so gehen seine beiden Diagonalen und die beiden Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der Gegenseiten alle vier durch denselben Punkt. —

Vier Tangenten an einem Kreise geben drei verschiedene Vierecke, weil man, wenn eine dieser Tangenten als erste Seite des Vierecks betrachtet wird, jede der drei andern als Gegenseite nehmen kann. — Die drei Vierecke sind $Ad'Bd, AEBF, Ed'Fd$. Wenn man die Tangente in a' als gemeinschaftliche Seite der drei Vierecke betrachtet, so sind die Tangenten in b, b' und a resp. die Gegenseiten in dem ersten, zweiten und dritten Viereck. — Wendet

man den vorhergehenden Lehrsatz auf die drei Vierecke an, so ergibt sich: daß die vier Geraden ab', $a'b$, AB, dd' durch denselben Punkt G gehen, daß die vier Geraden ab, $a'b'$, AB, EF auch durch denselben Punkt R gehen, und endlich daß die vier Geraden aa', bb', $d'd$, EF durch denselben Punkt ϱ gehen.

§. 329. In einem umschriebenen Kreisvierecke ist der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen der Pol der Geraden, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten verbindet. —

Denn der Pol der Geraden, welche die Durchschnittspunkte E, F der Gegenseiten des umschriebenen Vierecks $Ad'Bd$ verbindet, ist der Durchschnittspunkt der beiden Berührungssehnen ab', $a'b$ (§. 315), welcher derselbe ist, als der der beiden Diagonalen AB, dd' (§ 328). Folglich ꝛc.

§. 330. Wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, so bilden die beiden Diagonalen und die Verbindungsgerade der Durschschnittspunkte der Gegenseiten ein Dreieck, worin jede Winkelspitze die Gegenseite zur Polare hat. —

Denn wenn man den vorhergehenden Lehrsatz auf die beiden andern der erwähnten Vierecke anwendet, so ergibt sich: daß der Punkt R der Pol der Diagonale dd' und der Punkt ϱ der der Diagonale AB ist, so daß die drei Geraden AB, dd', EF ein Dreieck $GR\varrho$ bilden, worin jede Spitze der Pol der Gegenseite ist. Folglich ꝛc.

Hieraus folgt: daß die beiden Diagonalen in Beziehung auf den Kreis zwei harmonisch conjugirte Gerade sind. —

§ 331. Wenn man durch ein umschriebenes Viereck eine Transversale zieht, welche die beiden Diagonalen in zwei Punkten schneidet, und die beiden Punkte bestimmt, welche mit jenen diese Diagonalen harmonisch t[illegible] liegen diese beiden Punkte und der Pol [illegible] alle drei in gerader Linie. —

Denn es sei L die Transversale [illegible] die beiden Punkte verbindet, die mit

len schneidet, diese harmonisch theilen. Zieht man aus dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden L, L' Tangenten an den Kreis und Gerade nach den Endpunkten der Diagonalen; so bilden diese sechs Geraden ein Involutionsbüschel (§. 304). Aber die beiden Geraden L, L' sind die Doppelstrahlen dieses Büschels, weil sie jede der beiden Diagonalen harmonisch theilen, und folglich sind sie in Bezug auf die beiden Tangenten des Kreises harmonisch conjugirt, und mithin liegt der Pol der Geraden L auf der Geraden L', w. z. b. w.

Wenn die Gerade L in unendlicher Entfernung liegt, so hat man den Satz: In einem umschriebenen Kreisvierecke liegen die Mittelpunkte der beiden Diagonalen und des Kreises in gerader Linie. —

§. 332. Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben ist, so sind die Durchschnittspunkte der Tangenten in den Gegenspitzen und die der Gegenseiten vier in gerader Linie liegende Punkte. —

Denn in dem Viereck $aa'b'b$ (Fig. S. 290) liegen die vier Punkte E, F, ϱ, R in gerader Linie, weil sie der Polare des Durchschnittspunktes der Diagonalen ab', $a'b$ angehören, nämlich R, ϱ nach §. 314 und E, F nach §. 315. —

§. 333. In einem eingeschriebenen Kreisviereck ist der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen der Pol der Geraden, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten verbindet. —

Denn der Durchschnittspunkt G der Diagonalen ab', $a'b$ ist der Pol der Geraden ϱR (§. 314).

§. 334. In einem eingeschriebenen Kreisvierecke sind die Durchschnittspunkte der Diagonalen und der Gegenseiten drei Punkte von der Beschaffenheit, daß jeder die Verbindungslinie der beiden andern zur Polare hat. —

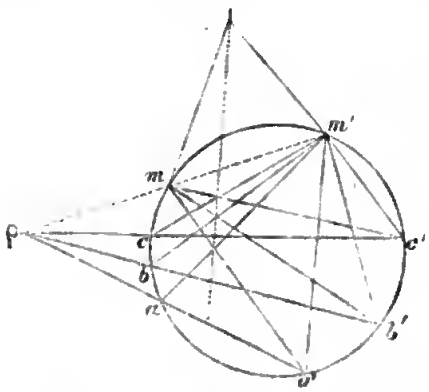
Denn GF ist die Polare des Punktes ϱ, $G\varrho$ die des Punktes R, und ϱR die des Punktes G der beiden Diagonalen ab', $a'b$.

Hieraus folgt: daß die Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines eingeschriebenen Kreisviereckes zwei in Bezug auf den Kreis conjugirte Punkte sind.

§. 335. Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben ist, so gehen die Polaren eines beliebigen Punktes in Beziehung auf den Kreis und in Bezug auf die von den Gegenseiten gebildeten Winkel alle drei durch denselben Punkt. —

Denn es sei P' der Durchschnittspunkt der Polaren eines Punktes P in Bezug auf die von den beiden Paaren Gegenseiten des Viereckes gebildeten Winkel, so trifft die Gerade PP' diese Seiten in zwei Punktepaaren $a, a'; b, b'$ und den Kreis in zwei Punkten e, f, welche alle sechs eine Involution bilden (§. 295). Die beiden Punkte P, P' theilen aber die beiden Segmente aa', bb' harmonisch; mithin auch das dritte Segment ef (§. 127), und folglich geht die Polare des Punktes P in Bezug auf den Kreis durch den Punkt P'. Folglich ꝛc.

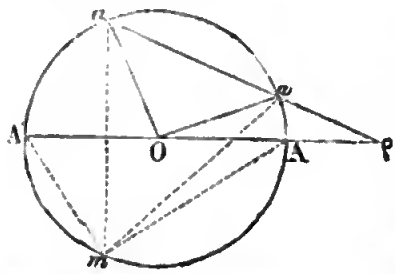
§ 336. Wenn drei Sehnen eines Kreises durch denselben Punkt gehen, so bilden die von irgend einem Punkte des Kreisumfanges nach ihren Endpunkten gehenden Geraden ein Involutionsbüschel. —



Es seien aa', bb', cc' die drei Sehnen, welche durch denselben Punkt ϱ gehen; so wird behauptet: daß die von irgend einem Punkte m des Kreisumfanges nach ihren Endpunkten gezogenen Geraden ein Involutionsbüschel bilden. Es braucht also blos bewiesen zu werden: daß das anharmonische Verhältniß der vier Geraden ma, mb mc, mc' dem der vier Geraden ma', mb', mc', mc gleich ist (§. 116). Zu dem Zwecke wollen wir den Punkt m mit dem Punkte ϱ verbinden, und es sei m' der Punkt, wo die Gerade $m\varrho$ den Kreis wieder schneidet; so ist das anharmonische Verhältniß der vier Geraden ma, mb, mc, mc' dem der vier Geraden $m'a, m'b, m'c, m'c'$

gleich, weil sich diese acht Geraden paarweise in vier in gerader Linie liegenden Punkten schneiden (§. 314). Folglich ist das anharmonische Verhältniß des Büschels ma, mb, mc, mc' dem des Büschels ma', mb', mc', mc gleich. Folglich ꝛc.

Umgekehrt: Wenn man einen Punkt des Kreisumfanges zur gemeinschaftlichen Spitze dreier Winkel nimmt, deren Schenkel ein Involutionsbüschel bilden; so gehen die diesen Winkeln entsprechenden Sehnen durch denselben Punkt. —



Wenn sich die Transversale $\varrho\, a\, a'$ um den Punkt ϱ drehet, so bilden die beiden Geraden ma, ma' zwei Involutionsbüschel, worin die nach den Endpunkten A', A des Durchmessers, auf welchem der Punkt ϱ liegt, gezogenen Geraden die beiden rechtwinkligen Strahlen sind. Man hat folglich:

$$tang\, amA \,.\, tang\, a'mA = const. \quad (§.\ 157)$$

und mithin:

$$tang\, \tfrac{1}{2} AOa \,.\, tang\, \tfrac{1}{2} AOa' = const.$$

Man hat also den Satz:

Wenn eine Kreissehne sich um einen festen Punkt drehet, so bilden die nach ihren Endpunkten gezogenen Halbmesser mit dem durch diesen Punkt gehenden Halbmesser zwei Winkel von solcher Beschaffenheit: daß das Produkt der Tangenten der halben Winkel constant ist. —

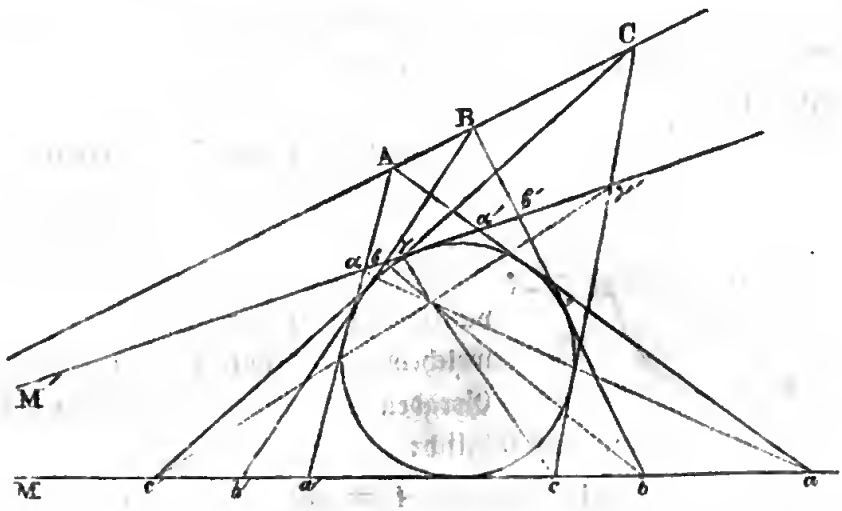
§. 337. Da die von irgend einem Punkte des Kreisumfanges nach den drei Punktepaaren $a, a'; b, b'; c, c'$ gezogenen sechs Geraden ein Involutionsbüschel bilden, so finden zwischen ihren Winkeln, und folglich zwischen den Hälften der zwischen diesen sechs Punkten liegenden Bogen, alle Involutionsbeziehungen für ein sechsstrahliges Büschel statt, und man hat z. B. die Relationen:

$$\frac{sin\, \tfrac{1}{2} ab \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} ab'}{sin\, \tfrac{1}{2} ac \,,\, sin\, \tfrac{1}{2} ac'} = \frac{sin\, \tfrac{1}{2} a'b \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} a'b'}{sin\, \tfrac{1}{2} a'c \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} a'c'},$$

$$sin\, \tfrac{1}{2} ab \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} b'c \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} c'a' = -\, sin\, \tfrac{1}{2} a'b' \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} bc' \,.\, sin\, \tfrac{1}{2} ca.$$

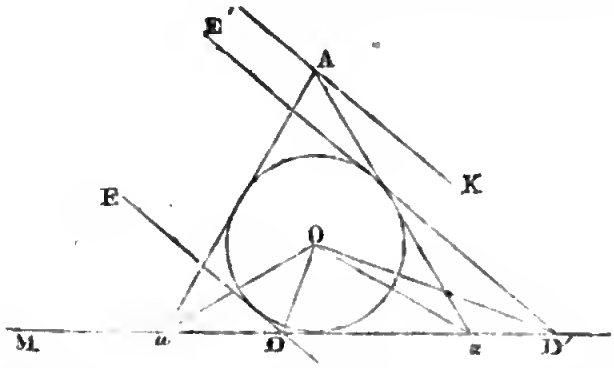
§. 338. Wenn die Spitzen dreier umschriebener Winkel in derselben Geraden liegen, so sind die Stücke, welche sie auf einer Tangente abschneiden in Involution. —

Es seien A, B, C die Spitzen der drei umschriebenen Winkel und aa', bb', cc' die Stücke, welche diese auf der Tangente M ab-



schneiden; so ist blos zu beweisen: daß das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, c' dem der vier Punkte a', b', c', c gleich ist. — Zieht man zu dem Zwecke durch den Durchschnittspunkt der Geraden ABC und der Tangente M eine zweite Tangente M', welche die Schenkel der drei Winkel in den Punkten $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ trifft; so ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a, b, c, c' dem der vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ gleich (§. 299); aber letzteres ist dem der vier Punkte a', b', c', c gleich, weil die vier Geraden $a\alpha', b\beta'$ $c\gamma', c'\gamma$ durch denselben Punkt, den Pol der Geraden ABC gehen (§. 319). Folglich ist das anharmonische Verhältniß der vier Punkte a', b', c', c dem der vier Punkte a, b, c, c' gleich. — Folglich ꝛc.

§. 339. Die zu der Geraden AK (Fig. S. 301) parallelen Tangenten $ED, E'D'$ schneiden die Tangente M in zwei conjugirten Involutionspunkten D, D', welche von dem Mittelpunkte O des Kreises aus unter einem rechten Winkel erscheinen (§. 297), so daß $tg\,DOa \,.\, tg\,DOa' = const.$ ist (§. 157). Aber diese Winkel sind die Hälften der Winkel, welche die beiden Tangenten Aa, Aa'



mit der Tangente DE bilden, und resp. gleich KAa, KAa' sind. — Man hat also den Satz:

Wenn man von jedem Punkte einer Geraden zwei Tangenten an einen Kreis zieht, so ist das Produkt der trigonometrischen Tangenten der Hälften der Winkel, welche sie mit dieser Geraden bilden, constant. —

Reciproke Polarfiguren.

§. 340. Wenn eine beliebige Figur gegeben ist, so bilden die Polaren ihrer verschiedenen Punkte eine correlative (reciproke) Figur. —

Denn erstens finden zwischen diesen beiden Figuren die descriptiven Beziehungen correlativer Figuren statt, weil den Punkten der einen Gerade in der andern entsprechen — und zweitens finden nach §. 327 auch die metrischen Relationen correlativer Figuren statt; folglich sind sie correlativ. —

Wenn sich in der ersten Figur eine Curve befindet, so entspricht derselben in der zweiten Figur eine andere Curve, welche die Polaren der verschiedenen Punkte der ersten umhüllt (berührt), und die Eigenschaft hat: daß sie der Ort der Pole der Tangenten der ersten Curve ist. — Denn ein Punkt der zweiten Curve ist der Durchschnitt zweier einander unendlich nahen Tangenten welche die Polaren zweier einander unendlich naheliegender Punkte der ersten Curve sind. Folglich ist dieser Punkt der zweiten Curve der Pol der Geraden, welche die beiden Punkte der ersten verbindet; aber da diese beiden Punkte einander unendlich nahe liegen, so ist diese Gerade eine Tangente der ersten Curve. Folglich ꝛc.

Die erste Curve könnte also mittelst der zweiten ebenso gebil-

det werden, wie diese mittelst jener gebildet ist; d. h. man braucht nur die Polaren der Punkte, oder die Pole der Tangenten der zweiten Curve zu suchen. — Wegen dieser reciproken (gegenseitigen) Eigenschaften der beiden Curven werden sie reciproke Polarcurven genannt — und der Kreis, in Beziehung auf welchen die Pole und Polaren genommen werden, heißt der Leit- oder Richtkreis.

§. 341. Da die metrischen Eigenschaften correlativer Figuren unmittelbar auf die reciproken Polarfiguren anwendbar sind, so hat man nach §. 281, 2, den folgenden Satz:

Wenn in der Ebene eines Kreises a, b zwei beliebige Punkte und A, B ihre Polaren sind, und man nimmt einen beliebigen andern Punkt m, dessen Polare M ist; so steht das Verhältniß der Abstände dieses Punktes m von den beiden Geraden A, B zu dem Verhältniß der Abstände der Geraden M von den beiden Punkten a, b in einem constanten Verhältniß, so daß man hat:

$$\frac{(m, A)}{(m, B)} = \lambda \cdot \frac{(M, a)}{(M, b)}.$$

Zur Bestimmung der Constante λ kann man die Gerade M in unendlicher Entfernung annehmen; alsdann werden ihre Abstände von den Punkten a, b einander gleich, und ihr Pol m fällt in den Mittelpunkt O des Kreises, so daß man hat:

$$\frac{(O, A)}{(O, B)} = \lambda$$

und die Gleichheit wird:

$$\frac{(m, A)}{(m, B)} : \frac{(M, a)}{(M, b)} = \frac{(O, A)}{(O, B)}.$$

Nach §. 312 ist auch:

$$\frac{(O, A)}{(O, B)} = \frac{Ob}{Oa} = \lambda.$$

Man kann die Constante λ auch auf folgende Weise bestimmen, wodurch man einen andern Ausdruck derselben erhält: Läßt man nämlich den Punkt m mit b, folglich die Gerade M mit B zusammenfallen; so kommt:

$$\frac{(b, A)}{(b, B)} = \lambda \cdot \frac{(B, a)}{(B, b)},$$

also:

$$\lambda = \frac{(A, b)}{(B, a)},$$

und folglich:

$$\frac{(m, A)}{(m, B)} : \frac{(M, a)}{(M, b)} = \frac{(A, b)}{(B, a)}.$$

Nach den beiden Ausdrücken von λ hat man:

$$\frac{(A, b)}{(B, a)} = \frac{(O, A)}{(O, B)};$$

d. h.: Wenn man in Bezug auf einen Kreis die Pole zweier Geraden bestimmt, so verhalten sich die Abstände dieser Geraden von dem Pole der andern, wie die Entfernungen derselben vom Mittelpunkte des Kreises. —

§. 342. Wenn man in dem letzten Satze die Gerade A als fest und B als beweglich betrachtet, letztere mit M und ihren Pol mit m bezeichnet; so erhält man die Gleichung:

$$\frac{(M, a)}{(M, O)} = \frac{(m, A)}{(O, A)}.$$

Betrachtet man nun die Gerade M als einer ersten Figur angehörig, so gehört ihr Pol m zu einer correlativen Figur (§. 340), und man kann vermittelst dieser Gleichung von den Eigenschaften einer der beiden Figuren auf die der andern schließen — z. B. aus dem Lehrsatze in §. 293 über das eingeschriebene Vieleck den in §. 302 über das umschriebene Vieleck herleiten. Denn man hat:

$$(m, A) = (M, a) \cdot \frac{(O, A)}{R},$$

oder:

$$(m, A) = (M, a) \cdot \frac{R}{Oa}.$$

§. 343. Wir wollen noch den Stewart'schen Satz nehmen: Wenn man von einem Punkte auf die Seiten eines um einen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vieleckes von m

Seiten Perpendikel fällt, so ist die Summe ihrer $n$ten Potenzen $(n < m)$ blos von dem Abstande dieses Punktes von dem Mittelpunkte des Kreises und nicht von der Lage des Vieleckes abhängig. —

Betrachten wir die Gerade A als eine der Seiten des Vieleckes, so ist ihr Berührungspunkt a eine Spitze eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vieleckes, und es ist:

$$(m, A) = (M, a) \cdot \frac{R}{(M, O)}.$$

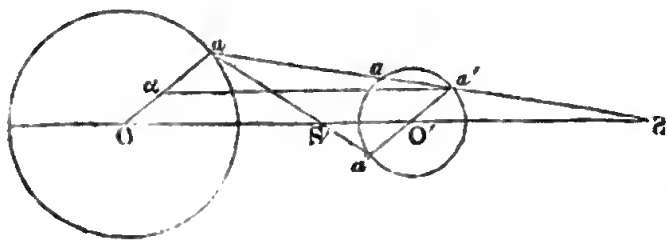
Wenn also die Gerade M ihre Lage ändert, aber stets denselben Abstand vom Punkte O behält; so bleibt die Summe der $n$ten Potenzen der Abstände (M, a) constant und man hat den Satz:

Wenn ein regelmäßiges Vieleck von m Seiten in einen Kreis beschrieben ist, so ist die Summe der $n$ten Potenzen $(n < m)$ der Abstände seiner Ecken von einer Geraden nur von dem Abstande der letztern vom Mittelpunkte des Kreises abhängig. —

Aus dem Vorhergehenden sieht man, daß es sehr nützlich ist, die allgemeinen metrischen Relationen der correlativen Figuren in die Theorie der reciproken Polarsysteme einzuführen und sich nicht blos auf descriptive und Winkelrelationen zu beschränken, wie es bisher geschehen ist. —

Eigenschaften zweier Kreise

§. 344. Aehnlichkeitsmittelpunkte zweier Kreise. — Zwei Kreise können als zwei homothetische, d. h. ähnliche und ähnlich liegende Figuren betrachtet werden, und zwar auf zwei verschiedene Arten, weil sie immer zwei Aehnlichkeitsmittelpunkte haben. — Denn wenn man in den beiden Kreisen zwei parallele Halbmesser von einerlei Sinn Oa, $O'a'$ zieht, so trifft die Verbindungs-



gerade ihrer Endpunkte die Mittelpunktslinie in einem Punkte S, welcher durch die folgende sich aus den beiden ähnlichen Dreiecken $aOS, a\alpha a'$ ergebende Proportion bestimmt wird:

$$\frac{Oa}{OS} = \frac{\alpha a}{\alpha a'} = \frac{Oa - O'a'}{OO'},$$

oder wenn R, r die Halbmesser der beiden Kreise bedeuten:

$$OS = \frac{R \,.\, OO'}{R - r}.$$

Dieser Ausdruck von OS ist constant, und zeigt: daß der Punkt S fest liegt, welche gemeinschaftliche Richtung die beiden Halbmesser $Oa, O'a'$ auch haben mögen.

Aber das Verhältniß $\frac{Sa}{Sa'}$ ist auch constant, weil es $= \frac{SO}{SO'}$ ist, und folglich sind die beiden Kreise zwei ähnliche Figuren, deren Aehnlichkeitsmittelpunkt S ist. —

Desgleichen, wenn man den Halbmesser $O'a''$ in einer der Richtung von Oa entgegengesetzten Richtung zieht, so schneidet aa'' die Mittelpunktslinie OO' in einem Punkte S', welcher durch die Gleichung:

$$OS' = \frac{R \,.\, OO'}{R + r}$$

bestimmt wird, und auch ein Aehnlichkeitsmittelpunkt ist. — Die beiden Kreise haben also zwei Aehnlichkeitsmittelpunkte, und aus der Construktion derselben folgt: daß der erste außerhalb und der zweite zwischen den beiden Kreismittelpunkten liegt, welche gegenseitige Lage die beiden Kreise auch haben mögen. Der erste Punkt wird der Mittelpunkt der direkten und der zweite der der inversen Aehnlichkeit genannt. --

Wenn sich die beiden Kreise berühren, so ist ihr Berührungspunkt ein Mittelpunkt der direkten, oder inversen Aehnlichkeit, jenachdem sie sich innerlich, oder äußerlich berühren.

§. 345. Die Aehnlichkeitsmittelpunkte zweier Kreise sind in Beziehung auf deren Mittelpunkte zwei harmonisch conjugirte Punkte. —

Denn man hat:

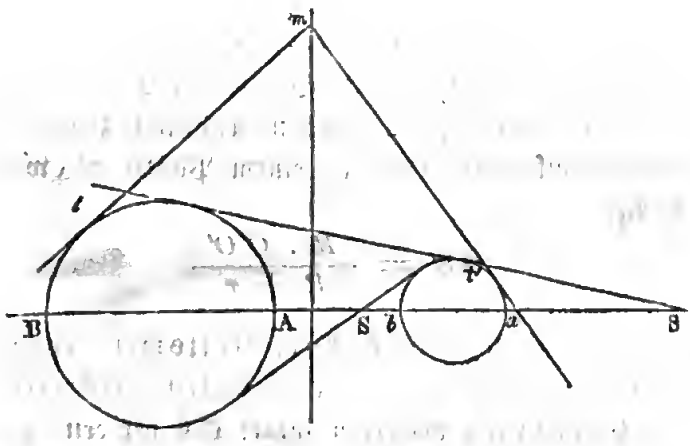
$$\frac{SO}{SO'} = \frac{R}{r} \text{ und } \frac{S'O}{S'O'} = \frac{R}{r};$$

folglich:

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{S'O}{S'O'}.$$

Da aber der eine Aehnlichkeitspunkt nicht zwiſchen den beiden Kreismittelpunkten, und der andere zwiſchen denſelben liegt; ſo iſt eins der beiden letzten Verhältniſſe poſitiv und das andere negativ, und folglich theilen die beiden Punkte S, S' das Segment OO' harmoniſch (§. 34).

§. 346. Die Aehnlichkeitsmittelpunkte zweier Kreiſe bilden mit den beiden Paaren von Durchſchnittspunkten der Kreiſe mit der Mittelpunktslinie eine Involution. —



Denn man hat:

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{R}{r}, \quad \frac{SB}{Sb} = \frac{R}{r};$$

folglich:

$$\frac{SA \cdot SB}{Sa \cdot Sb} = \frac{R^2}{r^2};$$

und ebenſo:

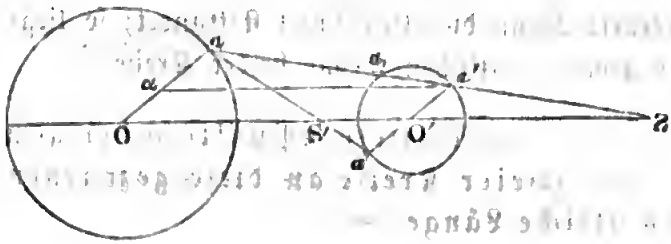
$$\frac{S'A \cdot S'B}{S'a \cdot S'b} = \frac{R^2}{r^2};$$

alſo:

$$\frac{SA.SB}{Sa.Sb} = \frac{S'A.S'B}{S'a.S'b},$$

welches eine Involutionsgleichung ist, weil beide Theile offenbar dasselbe Zeichen haben, da die beiden Punkte S, S' zugleich innerhalb, oder zugleich außerhalb der beiden Kreise liegen, so daß die beiden Produkte $SA.SB$, $Sa.Sb$, so wie die beiden Produkte $S'A.S'B, S'a.S'b$ stets dasselbe Zeichen haben.

§. 347. Jede durch den Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gezogene Transversale schneidet ihre Umfänge unter gleichen Winkeln. —



Denn die Winkel in a_1 und a' sind einander gleich, und die Winkel in a' und a ebenfalls, weil die beiden Kreise homothetisch, d. h. ähnlich und ähnlichliegend sind, und der Punkt S ihr Aehnlichkeitsmittelpunkt ist. — Folglich ꝛc.

Gemeinschaftliche Sehne — Radikalaxe — oder Potenzlinie zweier Kreise.

§. 348. Eine Gerade, deren reelle, oder imaginäre Durchschnittspunkte mit zwei Kreisen dieselben sind, soll gemeinschaftliche Sehne, Radikalaxe oder Potenzlinie dieser Kreise genannt werden. —

Zwei Kreise haben immer eine gemeinschaftliche Sehne. —

Denn zieht man eine beliebige Gerade, welche die beiden Kreise in zwei reellen, oder imaginären Punktepaaren a, b; a', b' schneidet; so gibt es auf dieser Geraden immer einen Punkt m von solcher Beschaffenheit: daß die Produkte $ma.mb, ma'.mb'$ einander gleich sind (§. 129), und wenn man von diesem Punkte auf

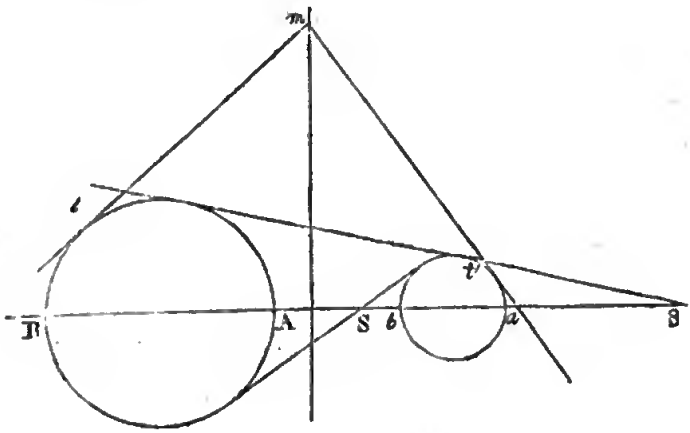
die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kreise ein Perpendikel fällt; so ist dasselbe die gemeinschaftlichen Sehne dieser Kreise, d. h. es schneidet sie in denselben beiden reellen, oder imaginären Punkten, weil die beiden Durchschnittspunkte mit jedem Kreise dieselbe Mitte haben, welche auf der Mittelpunktslinie liegt (§. 288) und die Produkte ihrer Abstände von dem Punkte m auch gleich sind, nämlich $ma \cdot mb = ma' \cdot mb'$ (§. 289). Folglich ꝛc.

Wenn also eine Transversale zwei Kreise in zwei Punktepaaren a, b; a', b und ihre gemeinschaftliche Sehne in einem Punkte m schneidet; so hat man stets die Gleichheit:

$$ma \cdot mb = ma' \cdot mb',$$

und umgekehrt: Wenn diese Gleichheit stattfindet; so liegt der Punkt m auf der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise. —

§. 349. Die von demselben Punkte m der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise an diese gezogenen Tangenten haben gleiche Länge. —



Denn wenn e, f die beiden reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der beiden Kreise bedeuten, so hat man:

$$(mt)^2 = me \cdot mf,$$

und ebenso:

$$(mt')^2 = me \cdot mf;$$

also:

$$mt = mt'.$$

Umgekehrt: Wenn die von demselben Punkte m an zwei

Kreiſe gezogenen Tangenten gleich lang ſind, ſo liegt dieſer Punkt auf der gemeinſchaftlichen Sehne beider Kreiſe. —

Denn die Tangente mt' an dem zweiten Kreiſe ſchneidet den erſten in zwei reellen, oder imaginären Pnnkten ε, φ, ſo daß man hat:

$$m\varepsilon \,.\, m\varphi = (mt)^2; \text{ (§. 289)}$$

aber nach der Vorausſetzung iſt $mt = mt'$; folglich:

$$m\varepsilon \,.\, m\varphi = (mt')^2,$$

und mithin liegt der Punkt m auf der gemeinſchaftlichen Sehne beider Kreiſe (§. 348).

Wegen der Gleichheit:

$$mt = mt' = \sqrt{me \,.\, mf},$$

oder:

$$(mt)^2 = (mt')^2 = me \,.\, mf$$

wird die gemeinſchaftliche Sehne zweier Kreiſe auch ihre Radikalare oder ihre Potenzlinie genannt. —

§. 350. Die Radikalare zweier Kreiſe iſt gleich weit entfernt von den beiden Polaren jedes Aehnlichkeitsmittelpunktes. —

Denn wenn man ſich an beide Kreiſe eine gemeinſchaftliche Tangente gezogen denkt, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt mit der Radikalare nach dem vorhergehenden Satze von den beiden Berührungspunkten gleich weit entfernt; aber dieſe Punkte liegen auf den Polaren des Aehnlichkeitsmittelpunktes, durch welchen die Tangente geht, und dieſe Polaren ſind zu der Radikalare parallel. Folglich ꝛc.

§. 351. Wenn man durch einen Punkt der Radikalare zweier Kreiſe zwei Sekannten zieht, die eine durch den einen und die andern durch den andern Kreis; ſo liegen die vier reellen, oder imaginären Durchſchnitspunkte auf einem Kreiſe. —

Denn es ſei m der Punkt der Radikalare, a, b ſeien die Durchſchnittspunkte des einen Kreiſes mit der einen Transverſale, a', b' die des andern Kreiſes mit der andern Transverſale und e, f die auf

der Radikalaxe liegenden gemeinschaftlichen Punkte beider Kreise; so ist:

$$ma \cdot mb = me \cdot mf \text{ und } ma' \cdot mb' = me \cdot mf;$$

folglich:

$$ma \cdot mb = ma' \cdot mb',$$

und mithin liegen die vier Punkte a, b, a', b auf einem Kreise (§. 289).

§. 352. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise hat die Eigenschaft: daß sich die Polaren jedes ihrer Punkte in Bezug auf die beiden Kreise auf dieser Sehne selbst schneiden. —

Denn die Polaren eines Punktes der gemeinschaftlichen Sehne gehen durch den Punkt, welcher auf dieser Geraden der harmonisch conjugirte des ersten in Bezug auf die beiden reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der beiden Kreise ist (§. 312).

Umgekehrt: Wenn eine Gerade so beschaffen ist, daß die Polaren jedes ihrer Punkte in Bezug auf zwei Kreise sich auf dieser Geraden schneiden, so ist sie die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise.

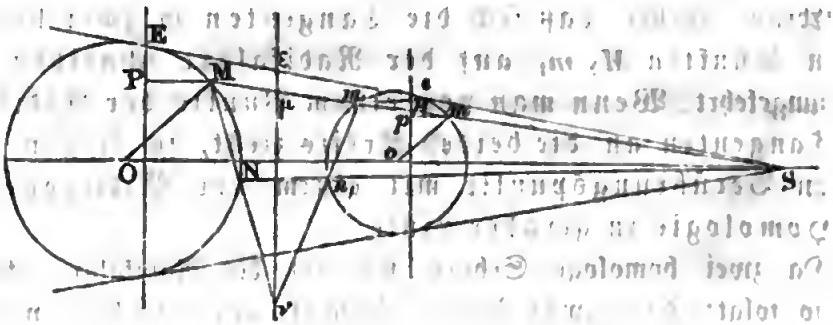
Denn wenn zwei Systeme von Punkten auf derselben Geraden L in Bezug auf jeden der beiden Kreise conjugirt sind, so sind die Durchschnittspunkte beider Kreise mit dieser Geraden dieselben (§. 326). Folglich ꝛc.

§. 353. Ein in unendlicher Entfernung liegender Punkt hat in beiden Kreisen zwei parallele Durchmesser zu Polaren, welche sich in unendlicher Entfernung schneiden, so daß die in unendlicher Entfernung liegende Gerade als eine gemeinschaftliche Sehne beider Kreise betrachtet werden kann. — Man kann also sagen: daß zwei Kreise vier Durchschnittspunkte haben, welche je zwei und zwei auf zwei stets reellen gemeinschaftlichen Sehnen liegen, indem auf der einen dieser Geraden, welche in endlicher Entfernung liegt und Radikalaxe heißt, die beiden Punkte reell, oder imaginär sind, während sie auf der andern, in unendlicher Entfernung liegenden Geraden stets imaginär sind. —

In dem besondern Falle, wo die beiden Kreise concentrisch sind, liegt auch ihre Radikalaxe in unendlicher Entfernung, und ihre beiden gemeinschaftlichen Sehnen fallen zusammen. Alsdann kann man sagen: daß die beiden Kreise in unendlicher Entfernung eine doppelte imaginäre Berührung haben, weil ihre vier Durchschnittspunkte zwei und zwei auf der in unendlicher Entfernung liegenden Geraden zusammenfallen. —

Kreise als homologische Figuren betrachtet.

§. 354. Zwei Kreise sind zwei homologische Figuren, deren Axe der Homologie die gemeinschaftliche Sehne oder Radikalaxe und deren Mittelpunkt der Homologie der eine oder andere Aehnlichkeitsmittelpunkt ist. —



Denn es seien M, m in Bezug auf den Aehnlichkeitsmittelpunkt S zwei homologe Punkte, und MP, mp die Abstände dieser Punkte von den Polaren des Punktes S in Bezug auf die beiden Kreise; so hat man wegen der Aehnlichkeit der beiden Figuren:

$$\frac{Sm}{SM} = \frac{mp}{MP},$$

Ferner sei m_1 der zweite auf der Geraden Sm liegende Punkt des Kreises o, und $m_1 p_1$ der Abstand dieses Punktes von der Polare des Punktes S; so ist:

$$\frac{Sm}{Sm_1} = -\frac{mp}{m_1 p_1}. \quad (\S.\ 312)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{SM}{Sm_1} = -\frac{MP}{m_1 p_1},$$

und hieraus erhellet: daß die beiden Punkte $M_1 m_1$ zwei homologischen Figuren angehören, worin die Polaren des Punktes S zwei homologe Gerade sind (§. 265); und da zwei homologische Figuren die Axe der Homologie in denselben Punkten treffen; so ist die Axe der Homologie zweier Kreise nicht anders als ihre Radikalaxe. Der Satz ist also erwiesen.

§. 355. Zwei homologe Sehnen $MN, m_1 n_1$, welche zwischen zwei von einem Mittelpunkt der Homologie ausgehenden Geraden liegen, schneiden sich auf der Radikalaxe.

Dieses folgt unmittelbar aus dem Begriffe homologischer Figuren (§§. 212 u. 263).

Ebenso erhellet: daß sich die Tangenten in zwei homologen Punkten M, m_1 auf der Radikalaxe schneiden. — Und umgekehrt: Wenn man von einem Punkte der Radikalaxe Tangenten an die beiden Kreise zieht, so liegen die beiden Berührungspunkte mit einem der Mittelpunkte der Homologie in gerader Linie.

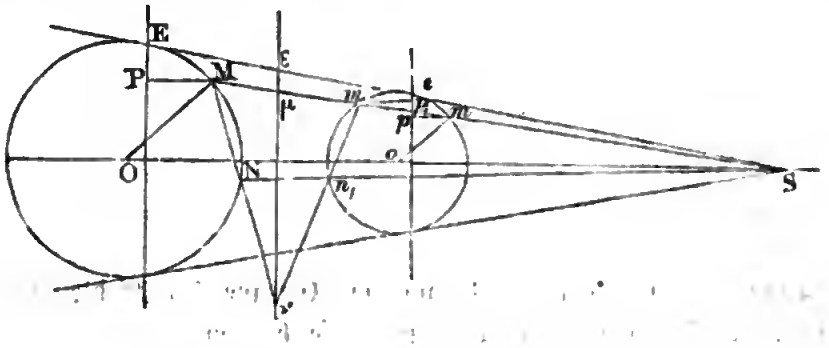
Da zwei homologe Sehnen sich auf der Radikalaxe schneiden, so folgt: daß zwei Paare homologer Punkte zweier Kreise auf demselben Kreise liegen (§. 351).

§. 356. Das Produkt oder Rechteck der Abstände zweier homologer Punkte zweier Kreise von ihrem Mittelpunkte der Homologie ist constant. — Denn da die vier Punkte M, N, m, n_1 auf demselben Kreise liegen (§. 351), so hat man:

$$SM \,.\, Sm_1 = SN \,.\, Sn_1.$$

§. 357. Die verschiedenen Lehrsätze, welche wir eben ganz natürlich aus den einfachsten Eigenschaften der homologischen Figuren abgeleitet haben, lassen sich auch sehr einfach direkt beweisen, wenn man den umgekehrten Gang einschlägt. — Da die beiden Punkte M, m in Bezug auf den Aehnlichkeitsmittelpunkt S homologe sind, so nennt man die beiden Punkte M, m_1 antihomologe, und wir wollen nun zuerst den letzten Satz beweisen, nämlich: daß das

Produkt oder Rechteck $SM \,.\, Sm_1$ für jede zwei antihomologe Punkte M, m_1 constant ist.



In der That hat man:

$$\frac{SM}{Sm} = \frac{R}{r}, \quad Sm \,.\, Sm_1 = (So)^2 - r^2;$$

folglich:

$$SM \,.\, Sm_1 = \frac{R}{r}[(So)^2 - r^2] = const.$$

Hieraus folgt: daß zwei antihomologe Punktepaare M, m_1 und N, n_1 auf demselben Kreise liegen. —

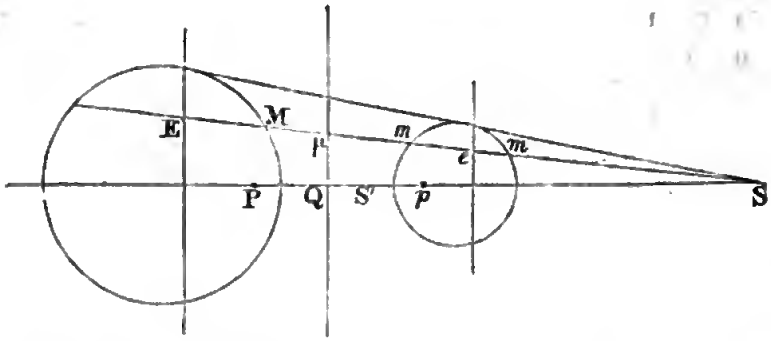
Wenn also ν der Durchschnittspunkt der beiden Sehnen MN, $m_1 n_1$ ist, so hat man:

$$\nu M \,.\, \nu N = \nu m_1 \,.\, \nu n_1.$$

Die von dem Punkte ν aus an die beiden Kreise gezogenen Tangenten sind also einander gleich; folglich liegt dieser Punkt ν auf der Radikalare (§. 349). Zwei antihomologe Sehnen schneiden sich folglich auf der Radikalare. — Hieraus folgt weiter: daß sich die Tangenten in zwei antihomologen Punkten auf der Radikalare schneiden — und daß zwei Kreise zwei homologische Figuren sind, deren Mittelpunkt und Are der Homologie der Aehnlichkeitsmittelpunkt S und die Radikalare sind (§. 263).

Was bisher in Bezug auf den Aehnlichkeitsmittelpunkt S gesagt ist, gilt offenbar auch von dem andern Aehnlichkeitsmittelpunkte S'. —

§. 358. Das Verhältniß oder der Coefficient der Homologie (§. 265) zweier Kreise ist ihrem, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Aehnlichkeitsverhältnisse gleich. —



Denn es sei μ der Punkt, wo die Gerade $Sm\,M$ die Radikalaxe oder die Axe der Homologie trifft, so hat man:

$$\frac{SM}{Sm_1} = \lambda \cdot \frac{M\mu}{m_1\mu}, \quad \text{(§. 265)}$$

und wenn E, e die auf den Polaren des Punktes S in beiden Kreisen liegenden Punkte sind; so sind dieselben in Beziehung auf den Aehnlichkeitsmittelpunkt S homologe Punkte, so daß man hat:

$$\frac{SE}{Se} = \frac{R}{r}.$$

Aber E, e sind in Bezug auf S, als Mittelpunkt der Homologie betrachtet, auch homologische Punkte; folglich nach §. 265:

$$\frac{SE}{Se} : \frac{\mu E}{\mu e} = \lambda \text{ oder } \frac{SE}{Se} = -\lambda$$

wegen $\mu E = -\mu e$ (§. 350). Folglich: $\lambda = -\frac{R}{r}$, w. z. b. w.

Die Verhältnisse der Homologie in Bezug auf die beiden Mittelpunkte der Homologie sind, wie die beiden Verhältnisse die Aehnlichkeit, einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen (§. 345).

§. 359. Die Pole der Radikalaxe in Bezug auf die beiden Kreise sind zu den beiden Mittelpunkten der Aehnlichkeit oder Homologie harmonisch conjugirt. —

Denn die beiden Kreise sind in Bezug auf den Punkt S (siehe obige Figur) homologische Figuren, und die Radikalaxe ist die Axe der Homologie (§. 354); folglich sind ihre Pole P, p homologische Punkte, so daß man hat:

$$\frac{SP}{Sp} : \frac{QP}{Qp} = \lambda,$$

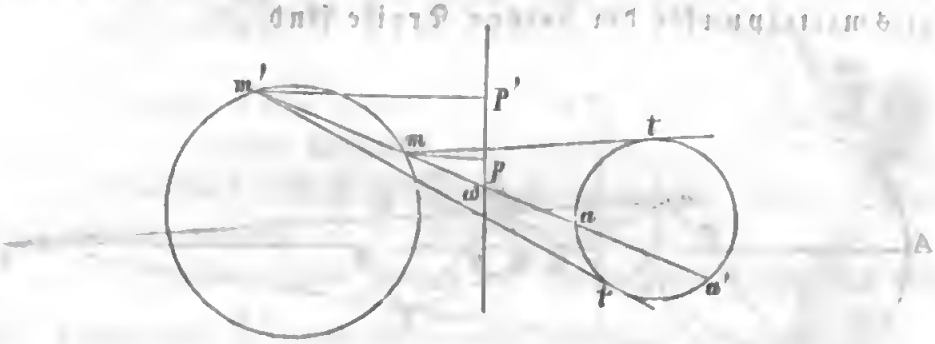
wo λ das Verhältniß der Homologie ist. Ebenso hat man in Bezug auf den zweiten Mittelpunkt S' der Homologie:

$$\frac{S'P}{S'p} : \frac{QP}{Qp} = -\lambda;$$

folglich:

$$\frac{SP}{Sp} : \frac{S'P}{S'p} = -1 \text{ oder } \frac{SP}{Sp} = -\frac{S'P}{S'p}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 360. Wenn zwei Kreise gegeben sind, und man zieht



von irgend einem Punkte m des einen eine Tangente mt an den andern und ein Perpendikel mp auf die Radikalaxe; so ist das Verhältniß $\frac{(mt)^2}{mp}$ constant. —

Denn eine durch den Punkt m gezogene Transversale schneidet die beiden Kreise in zwei Punktepaaren m, m'; a, a' und die Radikalaxe in einem Punkte ω, welcher der Centralpunkt der durch diese beiden Punktepaare bestimmten Involution ist, weil man hat:

$$\omega m \cdot \omega m' = \omega a \cdot \omega a', \text{ (§. 348.)}$$

woraus nach §. 119 die Involutionsgleichung folgt:

$$\frac{ma \cdot ma'}{m'a \cdot m'a'} = \frac{m\omega}{m'\omega},$$

oder:

$$\frac{(mt)^2}{(m't')^2} = \frac{m\omega}{m'\omega}$$

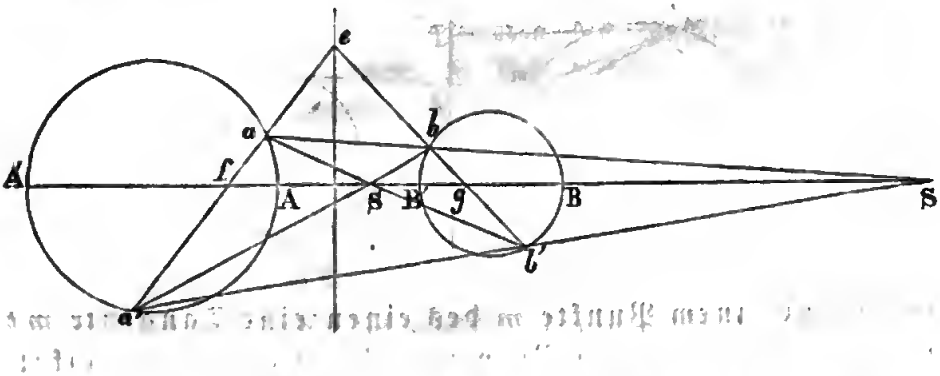
und:

$$\frac{m\omega}{m'\omega} = \frac{mp}{m'p'};$$

folglich:

$$\frac{(mt)^2}{mp} = \frac{(m't')^2}{m'p'}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 361. Wenn man von einem Punkte e der Radikalaxe zweier Kreise zwei Transversalen zieht, welche resp. durch die Pole f, g dieser Axe in den beiden Kreisen gehen; so schneiden sich die Geraden, welche die Durchschnittspunkte dieser Transversale mit den Kreisen verbinden, in zwei festen Punkten S, S' welche die Aehnlichkeitsmittelpunkte der beiden Kreise sind.



Denn da die Radikalaxe die Axe der Homologie beider Kreise ist, so sind ihre Pole zwei homologische Punkte; folglich die von demselben Punkte der Radikalaxe nach diesen beiden Punkten gezogenen Geraden zwei homologische Sehnen; also deren Endpunkte auf den beiden Kreisen homologische Punkte, welche mithin paarweise auf Geraden liegen, die durch die Mittelpunkte der Homologie gehen. —

Oder: Da der Punkt f der Pol der Radikalaxe ist, so hat man:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f} \text{ und } \left(\frac{ae}{af}\right)^2 = -\frac{ae \cdot a'e}{af \cdot a'f} = -\frac{ea \cdot ea'}{fA \cdot fA'},$$

und ebenso:

$$\left(\frac{be}{bg}\right)^2 = -\frac{eb \cdot eb'}{gB \cdot gB'};$$

folglich:

$$\frac{ae}{af} : \frac{be}{bg} = \pm\sqrt{\frac{gB \cdot gB'}{fA \cdot fA'}},$$

wegen $ea \cdot ea' = eb \cdot eb'$, da der Punkt e auf der Radikalaxe beider Kreise liegt. —

Ferner sei S der Punkt, wo die Gerade ab die Gerade fg trifft; so hat man in dem von der Transversale ab durchschnittenen Dreieck efg

$$\frac{ae}{af} : \frac{be}{bg} = \frac{Sg}{Sf}; \quad (\S\ 201)$$

folglich:

$$\frac{Sg}{Sf} = \pm\sqrt{\frac{gB \cdot gB'}{fA \cdot fA'}} = const.$$

Der Punkt S liegt also fest, und es ist einleuchtend, daß dasselbe mit dem zweiten Aehnlichkeitsmittelpunkte S' der Fall ist, weil man die Punkte b und b' in der Figur vertauschen kann. — Der Satz ist also erwiesen. —

Das eine der beiden Zeichen der Wurzelgröße bezieht sich auf das Verhältniß $\frac{Sg}{Sf}$ und das andere auf das Verhältniß $\frac{S'g}{S'f}$; folglich ist:

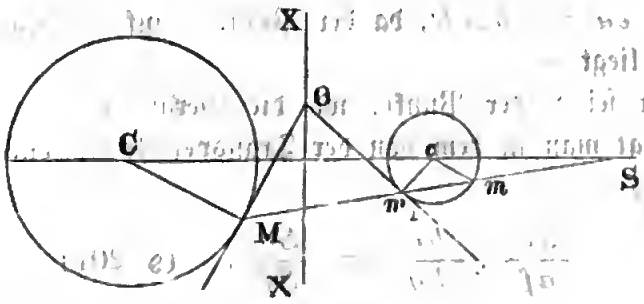
$$\frac{Sg}{Sf} = -\frac{Sg'}{S'f},$$

woraus folgt: daß die Pole der Radikalaxe in Bezug auf die beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte harmonisch conjugirt sind. —

Zu demselben Schlusse gelangt man auch, wenn man das Viereck $aba'b'$ betrachtet; denn die beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte S, S' sind die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, und die beiden Pole f, g sind die Punkte, worin die beiden Diagonalen aa', bb' die Gerade SS' treffen; folglich bilden diese vier Punkte eine harmonische Proportion (§. 193).

§. 362. Wenn man von irgend einem Punkte θ der Radikalaxe zweier Kreise an diese Tangenten zieht, so ist das Verhältniß der trigonometrischen Tangenten der

Winkel, welche die geometrischen Tangenten mit der Radikalaxe bilden, constant.



Denn in dem Kreise c hat man:

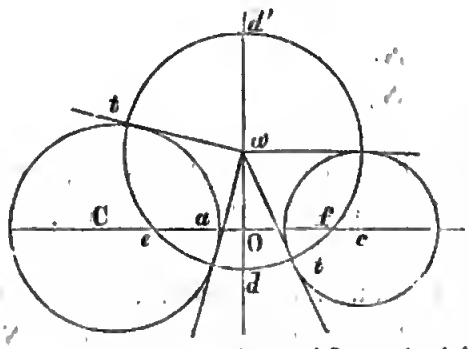
$$tang\,\tfrac{1}{2}\,mcS \,.\, tang\,\tfrac{1}{2}\,m_1\,cS = const. \qquad (\S.\ 336.)$$

Nun ist aber $\angle\ mcS = \angle\ MCS$ und $m_1\,cS$ ist das Supplement von $m_1\,cC$; folglich:

$$\frac{tang\,\tfrac{1}{2}\,MCS}{tang\,\tfrac{1}{2}\,m_1\,cC} = const.$$

oder:

$$\frac{tang\,\tfrac{1}{2}\,M\theta X}{tang\,\tfrac{1}{2}\,m_1\,\theta X} = const.$$ w. b. w. f.



§. 363. Wenn man von einem Punkte ω der Radikalaxe zweier Kreise an diese Tangenten zieht, so liegen die vier Berührungspunkte auf einem Kreise, welcher aus dem Punkte ω der Radikalaxe als Mittelpunkt beschrieben ist und die Mittelpunktslinie der beiden gegebenen Kreise in zwei reellen, oder imaginären festen Punkten schneidet, welche in Bezug auf diese Kreise conjugirt sind.

Daß die vier Berührungspunkte auf einem Kreise liegen, folgt unmittelbar aus §. 349. — Nun seien d, d' die Durchschnittspunkte des Kreises von dem Mittelpunkte ω mit der Radikalaxe, und e, f die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte dieses

Kreiſes mit der Mittelpunktslinie Cc der beiden gegebenen Kreiſe; ſo hat man:

$$Oe \,.\, Of = -(Oe)^2 = Od \,.\, Od' = (O\omega)^2 - (\omega d)^2.$$

Ferner ſeien ε, φ die Durchſchnittspunkte der beiden gegebenen Kreiſe, ſo iſt:

$$(\omega d)^2 = (\omega t)^2 = \omega\varepsilon \,.\, \omega\varphi;$$

folglich:

$$(Oe)^2 = \omega\varepsilon \,.\, \omega\varphi - (\omega O)^2 = -(O\varepsilon)^2.$$

Alſo iſt Oe conſtant, welche Lage der Punkt ω auf der Radikalaxe auch haben mag; d. h. der aus dieſem Punkte als Mittelpunkt beſchriebene Kreis ſchneidet die Mittelpunktslinie Cc ſtets in denſelben Punkten. —

Nun iſt aber:

$$O\varepsilon \,.\, O\varphi = -(O\varepsilon)^2 = Oa \,.\, Oa',$$

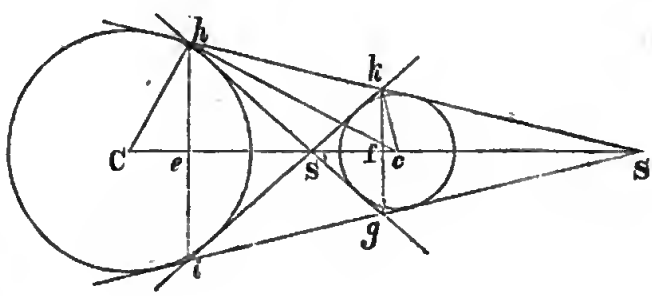
und folglich:

$$(Oe)^2 = Oa \,.\, Oa',$$

woraus erhellet: daß die beiden Punkte e, f in Bezug auf a, a' harmoniſch conjugirt ſind (§. 44). Der Satz iſt alſo bewieſen. —

Aus dem letzten Lehrſatze folgt ferner: daß alle aus den verſchiedenen Punkten ω der Radikalaxe als Mittelpunkten beſchriebenen Kreiſe die Mittelpunktslinie Cc der beiden gegebenen Kreiſe zur gemeinſchaftlichen Radikalaxe haben, weil ſie dieſe Gerade in denſelben reellen, oder imaginären Punkten e, f ſchneiden. —

§. 364. Die Diagonalen ih, gk eines zwei Kreiſen umſchriebenen Viereckes $ighk$ treffen die Mittelpunktslinie in zwei Punkten ef, wovon jeder in beiden Kreiſen dieſelbe Polare hat. —



Denn wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, so bilden die beiden Diagonalen ih, gk und die Verbindungslinie SS' der Durchschnittspunkte der Gegenseiten ein Dreieck, worin jede Spitze die Gegenseite zur Polare hat (§. 330). Folglich hat der Punkt e, worin die Gerade ih die Gerade SS' trifft, in beiden Kreisen die Gerade gk zur Polare, und ebenso hat der Punkt f die Gerade ih zur Polare. —

§. 365. Der über der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die vier Spitzen des von den gemeinschaftlichen Tangenten jener beiden Kreise gebildeten Vierecks. —

Denn der nach dem Durchschnittspunkte h (s. letzte Fig.) der beiden gemeinschaftlichen Tangenten Sh, $S'h$ gehende verlängerte Halbmesser ch halbirt den von diesen Tangenten gebildeten Winkel ShS', und Ch halbirt das Supplement dieses Winkels. Folglich sind Sh und ch aufeinander senkrecht, und mithin liegt der Punkt h auf dem über Cc als Durchmesser beschriebenen Kreise. —

§. 366. Wenn ein Viereck um zwei Kreise beschrieben ist, und man zieht von einem Punkte P die Tangenten an diese Kreise, so wie zwei Gerade nach den Gegenspitzen des Vierecks; so bilden die sechs Geraden ein Involutionsbüschel.

Denn die beiden Tangenten an dem ersten Kreise bilden mit den von dem Punkte P nach den beiden Paaren von Gegenspitzen des Vierecks gezogenen Geraden ein Involutionsbüschel (§. 304), und ebenso die Tangenten an dem zweiten Kreise. Folglich bilden auch drei beliebige dieser vier Paare von Geraden ein Involutionsbüschel.

Diese Beweisart setzt voraus: daß die vier Spitzen des Vierecks reell sind; aber der folgende Beweis ist auch in dem Falle anwendbar, wo nur zwei Spitzen des Vierecks reell sind, nämlich die beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte.

Es seien A, A' und B, B' die von einem Punkte P an die beiden Kreise gezogenen beiden Paare reeller, oder imaginärer Tangenten, E, F die durch den Aehnlichkeitsmittelpunkt S und E', F' die durch den Aehnlichkeitsmittelpunkt S' gehenden beiden gemeinschaftlichen Tangenten; so hat man für die von den Spitzen des

Dreieckes PSS' ausgehenden Tangenten an dem ersten Kreise nach §. 311 die Gleichung:

$$\frac{\sin SPA.\sin SPA'}{\sin S'PA.\sin S'PA'}\cdot\frac{\sin PS'E'.\sin PS'F'}{\sin SS'E'.\sin SS'F'}\cdot\frac{\sin S'SE.\sin S'SF}{\sin PSE.\sin PSF}=1,$$

und für den zweiten Kreis hat man eine ähnliche Relation, worin die Tangenten B, B' an die Stelle von A, A' treten. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich offenbar folgende Involutionsgleichung:

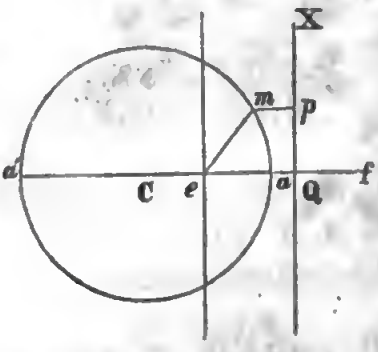
$$\frac{\sin SPA.\sin SPA'}{\sin S'PA.\sin S'PA'}=\frac{\sin SPB.\sin SPB'}{\sin S'PB.\sin S'PB'}. \quad (\text{§. 150.})$$

Folglich *etc.*

§. 367. Man kann einen Punkt als einen unendlich kleinen Kreis oder als einen Kreis von einem Halbmesser $=0$ zu betrachten haben. — Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem solchen unendlich kleinen Kreise sind imaginär; ihre Mitte ist, wie in dem allgemeinen Falle, der Fußpunkt des vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällten Perpendikels, und das Quadrat der halben Sehne, welche die beiden imaginären Punkte bestimmen, ist dem mit dem Zeichen — genommenen Quadrate der Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte des Kreises gleich, wie aus dem Ausdrucke in §. 289 folgt. Allgemeiner kann man sagen: das Produkt der Entfernungen eines Punktes der Geraden von den beiden imaginären Punkten ist gleich dem Quadrate der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte des Kreises (§. 289).

Die Radikalaxe eines Kreises und eines Punktes hat dieselben Eigenschaften, wie die zweier Kreise, und ist die Gerade, welche den Kreis und den Punkt in denselben beiden imaginären Punkten trifft, oder die Gerade, auf welcher die beiden Durchschnittspunkte des Kreises und des Punktes liegen. — Die von einem beliebigen Punkte der Radikalaxe an den Kreis gezogene Tangente ist der Entfernung dieses Punktes von dem als unendlich kleinen Kreis betrachteten Punkte gleich. —

§. 368. Die Radikalaxe eines Punktes e und eines Kreises C ist von diesem Punkte und von seiner Polare in Beziehung auf den Kreis gleichweit entfernt. —



Denn es bezeichne ε einen der imaginären gemeinschaftlichen Punkte des Kreises C und des Punktes e, welche auf der Radikalaxe QX liegen; so hat man für den Punkt e nach §. 367, $(Q\varepsilon)^2 = -(Qe)^2$, und für den Kreis $(Q\varepsilon)^2 = -Qa \cdot Qa'$; also: $(Qe)^2 = Qa \cdot Qa'$. — Nimmt man also $Qe = Qf$, so sind die beiden Punkte e, f in Bezug auf a, a' harmonisch conjugirt (§. 44), und folglich geht die Polare des Punktes e in Bezug auf den Kreis C durch den Punkt f, welcher von der Radikalaxe ebensoweit entfernt ist, als der Punkt e.

§. 369. Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes m des Kreises von dem als unendlich kleinen Kreis betrachteten Punkte ist der Entfernung desselben Punktes m von der Radikalaxe proportional (§. 360). Hieraus ergibt sich folgende Eigenschaft des Kreises:

Wenn in der Ebene eines Kreises ein fester Punkt e angenommen wird, so gibt es immer eine feste Gerade QX von solcher Beschaffenheit: daß das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes m des Kreises von diesem festen Punkte zu der Entfernung desselben Punktes m von der festen Geraden in einem constanten Verhältniß steht, so daß man hat:

$$\frac{(em)^2}{mp} = \frac{(ea)^2}{aQ}.$$

Diese Axe QX, welche dem Punkte e entspricht, ist von diesem Punkte und von seinem in Bezug auf a, a' harmonisch conjugirten Punkte f gleichweit entfernt (§. 368). Man kann sie durch die Proportion bestimmen:

$$\frac{aQ}{a'Q} = \frac{(ae)^2}{(a'e)^2}. \quad \text{(§. 46, Gl. 15')}$$

§. 370. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen un-

endlich kleinen Kreis geht durch den Punkt, welcher diesen Kreis darstellt, und ist senkrecht auf der Geraden, welche diese beiden Punkte verbindet. — Hieraus folgt: daß zwei in Bezug auf einen als **unendlich kleinen** Kreis betrachteten Punkt conjugirte Punkte von jenem Punkte aus unter einem rechten Winkel erscheinen. —

Wenn die beiden conjugirten Punkte auf der Radikalaxe eines Kreises und eines Punktes genommen werden, so sind sie auch in Bezug auf den Kreis conjugirt, und man hat folglich den Satz:

Wenn eine Gerade einen Kreis nicht schneidet, so gibt es zu beiden Seiten derselben einen Punkt, von wo aus das Segment dieser Geraden, welches zwischen zwei beliebigen in Bezug auf den Kreis conjugirten Punkten liegt, unter einem rechten Winkel erscheint. —

Drei und mehrere Kreise, welche dieselbe Radikalaxe haben.

§. 371. Wenn von drei Kreisen je zwei dieselbe Radikalaxe haben, so werden sie von einer Transversale in sechs Punkten geschnitten, welche eine Involution bilden, deren Centrakpunkt auf der Radikalaxe liegt. —

Denn es seien $a, a'; b, b'; c, c'$ die sechs Durchschnittspunkte der Transversale mit den drei Kreisen und o ihr Durchschnittspunkt mit der Radikalaxe; so hat man nach §. 348:

$$oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = oc \,.\, oc',$$

wodurch die Involution ausgedrückt wird. —

Wenn die Transversale eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreisen wird, so sind die Berührungspunkte in Bezug auf die beiden Durchschnittspunkte der Transversale mit dem dritten Kreise harmonisch conjugirt. —

§. 372. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben und man zieht durch einen beliebigen Punkt m des einen in einer beliebigen Richtung eine Transversale, welche die beiden andern Kreise in zwei Punktepaaren $a, a'; b, b'$ schneidet; so hat das Verhältniß:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{mb \,.\, mb'}$$

einen conſtanten Werth und immer daſſelbe Zeichen.

Denn es ſeien α, β, μ die Mitten der von den drei Kreiſen auf der Transverſale abgeſchnittenen drei Segmente aa', bb', mm'; ſo hat man:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{mb \,.\, mb'} = \frac{\mu\alpha}{\mu\beta} \quad (\S.\ 139.)$$

Da aber α, β, μ die Fußpunkte der aus dem Mittelpunkten der drei Kreiſe auf die Transverſale gefällten Perpendikel ſind, ſo iſt das Verhältniß $\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}$ ſowohl hinſichtlich der Zahlenwerthes, als des Zeichens dem Verhältniſſe der Enfernungen des einen dieſer Mittelpunkte von den beiden andern gleich. Folglich ꝛc.

Wenn man blos beweiſen wollte: daß der Zahlenwerth des Verhältniſſes:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{mb \,.\, mb'}$$

conſtant iſt, ſo brauchte man nur zu bemerken: daß die ſechs Punkte $a, a'; b, b'; m, m'$ nach §. 371 ein Involution bilden, ſo daß man hat:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{mb \,.\, mb'} = \frac{m'a \,.\, m'b}{m'a' \,.\, m'b'}.$$

§. 373. Wenn drei Kreiſe dieſelbe Radikalaxe haben, ſo ſtehen die Längen der von irgend einem Punkte m des einen an die beiden andern gezogenen Tangenten in einem conſtanten Verhältniß.

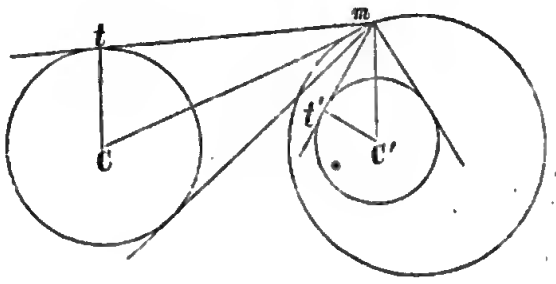
Denn das Verhältniß der Quadrate dieſer Tangenten iſt dem Verhältniß:

$$\frac{ma \,.\, ma'}{mb \,.\, mb'},$$

welches nach §. 372 conſtant iſt, gleich. —

§. 374. Wenn drei Kreiſe dieſelbe Radikalaxe haben, ſo erſcheinen zwei dieſer Kreiſe von jedem Punkte des

dritten aus untern Winkeln, wovon die trigonometrischen Tangenten der Hälften in einem constanten Verhältniß stehen. —



Denn man hat:

$$tang\, t\, m\, C = \frac{Ct}{mt} = \frac{R}{mt},\ tang\, t'\, m\, C' = \frac{R'}{mt'};$$

folglich:

$$\frac{tang\, t\, m\, C}{tang\, t'\, m\, C'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{mt}{mt'}.$$

Nun ist aber das Verhältniß $\frac{mt}{mt'}$ nach §. 373 constant; folglich ꝛc.

§. 375. Wenn man über der Verbindungslinie der Aehnlichkeitsmittelpunkte zweier Kreise als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so geht derselbe durch die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der beiden ersten, welche von jedem seiner Punkte aus unter gleichen Winkeln erscheinen. —

Denn durch die Aehnlichkeitsmittelpunkte der beiden Kreise kann man einem Kreis legen, welcher mit jenen dieselbe Radikalaxe hat, weil die beiden Aehnlichkeitsmittelpunkte mit den in derselben Geraden liegenden Punkten a, b; a', b' der beiden ersten Kreise eine Involution bilden (§. 346). — Ferner ist das Verhältniß der Quadrate der von einem Punkte des dritten Kreises an die beiden ersten gezogenen Tangenten nach §. 373 constant und gleich:

$$\frac{Sa_1\, Sb}{Sa\, .\, Sb'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

und folglich sind nach dem vorhergehenden Lehrsatze die beiden Winkel, unter welchen die beiden ersten Kreise von einem beliebigen Punkte des dritten Kreises aus erscheinen, einander gleich. —

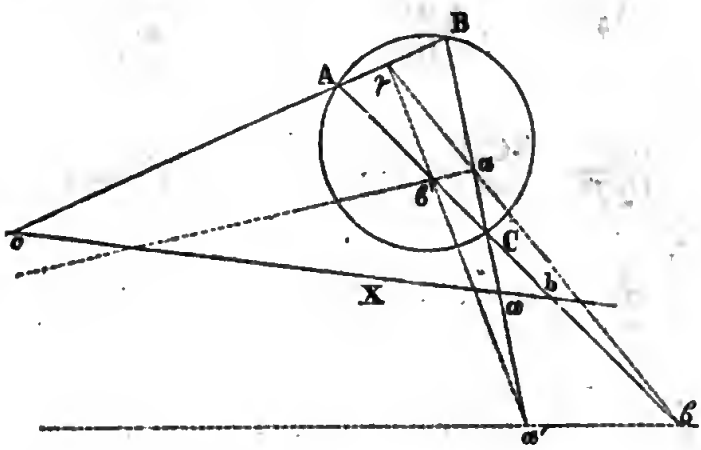
§. 376. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalare haben, und man zieht von einem Punkte Tangenten an dieselben; so gehen die drei Berührungssehnen durch denselben Punkt. — Oder mit andern Worten: Die Polaren desselben Punktes in Beziehung auf die drei Kreise gehen durch denselben Punkt.

Denn es sei P irgend ein Punkt und P' der Durchschnittspunkt seiner Polaren in Bezug auf zwei Kreise; so trifft die Gerade PP' die drei Kreise in drei Punktepaaren $a, a'; b, b'; c, c'$, welche in Involution sind (§. 371). Nun sind aber die beiden Punkte P, P' in Bezug auf a, a' und auf b, b' harmonisch conjugirt (§. 312); folglich sind sie Doppelpunkte der Involution, und theilen mithin das dritte Segment c, c' harmonisch. Folglich geht die Polare des Punktes P in Bezug auf den dritten Kreis durch den Punkt P', wodurch der Lehrsatz bewiesen ist. —

Die beiden Punkte P, P', welche in Bezug auf jeden der drei Kreise conjugirt sind, liegen auf beiden Seiten der Radikalare in gleichen Abständen von derselben; denn sie sind die Doppelpunkte einer Involution, deren Centralpunkt auf der Radikalare liegt (§. 371).

§. 377. Wenn ein Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, und man legt durch zweireelle, oder imaginäre Punkte P, P' des Kreises sechs Kreise, welche die drei Seiten des Dreieckes paarweise berühren; so liegen die sechs Berührungspunkte je drei auf vier Geraden. — Oder: die sechs Berührungspunkte bilden die vier Spitzen und die zwei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes, worin die Diagonalen und die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten die Richtungen der drei Seiten des Dreieckes haben. —

Denn es seien a, b, c die Durchschnittspunkte der drei Seiten des Dreieckes ABC mit der Sehne PP' und α, β, γ resp. drei Berührungspunkte auf denselben Dreiecksseiten; so hat man, wenn



$(A, X), (B, X), (C, X)$ resp. die Abstände der drei Spitzen A, B, C von der Sehne PP', welche die gemeinschaftliche Radikalare des gegebenen Kreises und der die Seiten des Dreieckes berührenden Kreise ist, bezeichnen (§. 360):

$$\frac{(A\gamma)^2}{(B\gamma)^2} = \frac{(A,X)}{(B,X)}, \frac{(B\alpha)^2}{(C\alpha)^2} = \frac{(B,X)}{(C,X)}, \frac{(C\beta)^2}{(A\beta)^2} = \frac{(C,X)}{(A,X)},$$

woraus folgt:

$$\frac{A\gamma}{B\gamma} \cdot \frac{B\alpha}{C\alpha} \cdot \frac{C\beta}{A\beta} = \pm 1.$$

Es geben also drei beliebige, auf den Seiten des Dreieckes liegende, der sechs Berührungspunkte diese Gleichung, woraus folgt: daß die drei Punkte in gerader Linie liegen, oder daß die von diesen Punkten nach den drei Spitzen des Dreieckes gehenden Geraden sich in demselben Punkten schneiden. Dieses kann aber nur insofern stattfinden, als die sechs Punkte die vier Spitzen und die zwei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes sind. Der Satz ist also erwiesen. —

Oder: Der Punkt α ist der Centralpunkt einer Involution, worin die beiden Spitzen B, C zwei conjugirte Punkte sind und α ein Doppelpunkt ist. Man hat folglich (§. 371):

$$\frac{(B\alpha)^2}{(C\alpha)^2} = \frac{B\alpha}{C\alpha},$$

und ebenso:

$$\frac{(A\gamma)^2}{(B\gamma)^2} = \frac{Ac}{Bc}\,,\quad \frac{(C\mathfrak{C})^2}{(A\mathfrak{C})^2} = \frac{Cb}{Ab}\,;$$

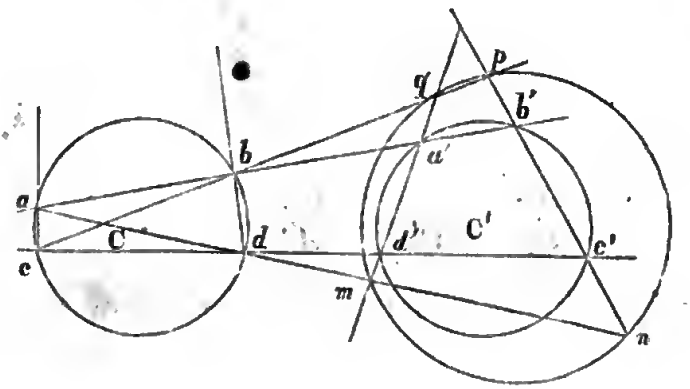
folglich:

$$\frac{(A\gamma)^2}{(B\gamma)^2}\cdot\frac{(B\alpha)^2}{(C\alpha)^2}\cdot\frac{(C\mathfrak{C})^2}{(A\mathfrak{C})^2} = \frac{Ac}{Bc}\cdot\frac{Ba}{Ca}\cdot\frac{Cb}{Ab} = 1;\quad (\S.\ 201)$$

also:

$$\frac{A\gamma}{B\gamma}\cdot\frac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\frac{C\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \pm 1,\ \text{w. z. b. w.}$$

§. 378. Wenn die Schenkel eines Winkels zwei Kreise C, C' resp. in vier Punkten a, b, c, d und a', b', c', d' treffen, so schneiden die zwei Sehnen ad, bc in dem ersten Kreise die beiden Sehnen $a'd', b'c'$ in dem zweiten in vier Punkten m, n, p, q, welche auf einem Kreise liegen, der mit C, C' dieselbe Radikalaxe hat. —



Wir wollen zunächst beweisen: daß man durch zwei auf derselben Sehne eines der beiden Kreise, z. B. durch die beiden auf der Sehne ad des Kreises C liegenden Punkte m, n einen Kreis legen kann, welcher mit den beiden gegebenen Kreisen C, C' dieselbe Radikalaxe hat. — Denn da das Viereck $a'b'c'd'$ in den Kreis C' beschrieben ist, so sind die vier Punkte a, d; m, n und die beiden Durchschnittspunkte des Kreises C' mit der Geraden mn in Involution (§. 295). Man kann also durch die beiden Punkte m, n einen Kreis legen, welcher mit den beiden Kreisen C, C' dieselbe Radikalaxe hat (§. 371). Aus demselben Grunde geht dieser Kreis, welcher durch den Punkt m allein bestimmt wird, auch durch den Punkt q,

welcher mit m auf der Sehne $a'd'$ des zweiten Kreises C' liegt, und da er durch den Punkt q geht, so geht er auch durch den Punkt p, welcher mit q auf der Sehne bc des Kreises C liegt. Derselbe Kreis geht also durch die vier Punkte m, n, p, q.

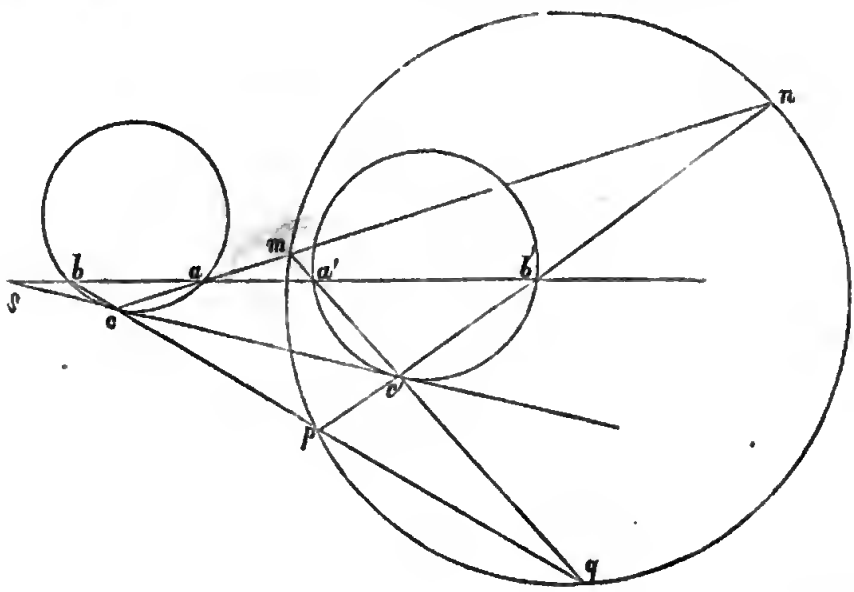
In diesem Satze sind wegen der verschiedenen Lagen, welche die beiden Schenkel des Winkels haben können, mehrere besondere Fälle enthalten, welche wir noch näher erörtern wollen.

1) Wenn ein Schenkel einen Kreis berührt, so gehen die beiden Sehnen in diesem Kreise von dem Berührungspunkte aus, und wenn der andere Schenkel denselben Kreis auch berührt; so fallen die beiden Sehnen in eine zusammen, welche auf den beiden Sehnen des zweiten Kreises zwei Punkte bestimmt, durch welche ein Kreis geht, der diese beiden Sehnen berührt und mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat. —

2) Wenn die beiden Schenkel des Winkels zusammenfallen, so werden die in den beiden Kreisen liegenden Sehnen Tangenten, und man hat den Satz:

Wenn eine Transversale zwei Kreise in vier Punkten schneidet, und man zieht in diesen Punkten Tangenten, so treffen die beiden Tangenten des ersten Kreises die des zweiten in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen, der mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat. —

3) Wenn einer der beiden Schenkel des Winkels die beiden Kreise zugleich berührt, so hat man folgenden Satz:



Wenn zwei Kreiſe gegeben ſind, an welche eine der gemeinſchaftlichen Tangenten gezogen iſt, und man nimmt die beiden Berührungspunkte als Scheitel zweier Winkel, welche die auf derſelben Transverſale liegenden Sehnen in den beiden Kreiſen zwiſchen ihre Schenkel faſſen; ſo ſchneiden ſich dieſe Schenkel in vier Punkten, die auf einem Kreiſe liegen, der durch die Durchſchnittspunkte der beiden gegebenen Kreiſe geht. —

Die beiden Sehnen ca, cb des erſten Kreiſes treffen alſo die beiden Sehnen $c'a', c'b'$ des zweiten in vier Punkten m, n, p, q, welche auf einem Kreiſe liegen, der durch die reellen, oder imaginären Durchſchnittspunkte der beiden gegebenen Kreiſe geht. — Man kann dieſen Satz auch direkt beweiſen, und den Ausdruck deſſelben noch verallgemeinern, wenn man noch hinzufügt: Wenn ſich die Transverſale, auf welcher die beiden Kreiſe die Sehnen abſchneiden, um einen feſten Punkt der gemeinſchaftlichen Tangente drehet; ſo bleibt der dritte Kreis immer derſelbe. —

Denn es ſei ϱ der Punkt, wo die Transverſale aa die gemeinſchaftliche Tangente cc' trifft; ſo gibt das mit der Transverſale $\varrho aa'$ durchſchnittene Dreieck mcc':

$$\frac{\varrho c}{\varrho c'} \cdot \frac{a'c'}{a'm} \cdot \frac{am}{ac} = 1. \qquad (\alpha)$$

Nun iſt aber:

$$ac = D \cdot \sin c,\ a'c' = D' \cdot \sin c',$$

wo D, D' die Durchmeſſer der beiden Kreiſe bedeuten; folglich:

$$\frac{a'c'}{ac} = \frac{D'}{D} \cdot \frac{\sin c'}{\sin c} = \frac{D'}{D} \cdot \frac{mc}{mc'},$$

und die Gleichung (α) wird:

$$\frac{\varrho c}{\varrho c'} \cdot \frac{ma \cdot mc}{ma' \cdot mc'} \cdot \frac{D'}{D} = 1,$$

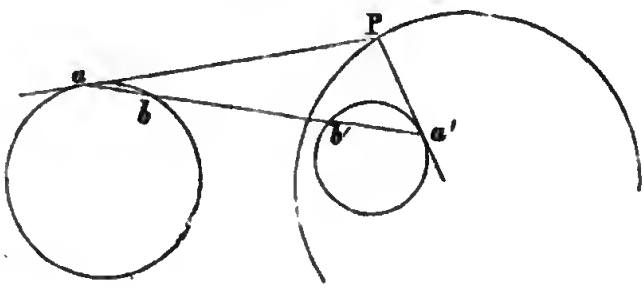
oder:

$$\frac{ma \cdot mc}{ma' \cdot mc'} = \frac{D}{D'} : \frac{\varrho c}{\varrho c'}.$$

Wenn sich also die Transversale um den Punkt ϱ drehet, so bleibt das Verhältniß $\frac{ma \cdot mc}{ma' \cdot mc'}$ constant, und folglich beschreibt der Punkt m einen Kreis, welcher mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat (§. 372). —

§. 379. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und man zieht von einem beliebigen Punkte P des einen eine Tangente an jeden der beiden andern, und verbindet die Berührungspunkte a, a' durch eine Gerade; so stehen die Sehnen, welche die beiden letzten Kreise auf dieser Geraden abschneiden, in einem constanten Verhältniß, so daß man hat:

$$\frac{ab}{a'b'} = const.$$



Denn es ist:

$$ab = 2R \sin Pab,\ a'b' = 2R' \sin Pa'b',$$

wo R, R' die Halbmesser der beiden Kreise bedeuten; folglich:

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{\sin Pab}{\sin Pa'b'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{Pa'}{Pa}.$$

Da aber der Punkt P auf einem Kreise liegt, welcher mit den beiden andern dieselbe Radikalaxe hat; so ist das Verhältniß $\frac{Pa'}{Pa}$ constant (§. 373), und mithin ist auch $\frac{ab}{a'b'} = const.$, w. z. b. w.

Umgekehrt: Wenn man eine Transversale so zieht, daß zwei gegebene Kreise darauf zwei Sehnen $ab, a'b'$ abschneiden, welche in einem constanten Verhältniß stehen;

so schneiden sich die Tangenten in den Punkten a, a' in einem Punkte P, dessen geometrischer Ort, wenn die Transversale ihre Lage ändert, ein Kreis ist, der durch die Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Kreise geht. —

Denn aus der Relation $\frac{ab}{a'b'} = const.$ folgt, wie wir eben gesehen, die Relation $\frac{Pa}{Pa'} = const.$, wodurch der Satz bewiesen ist. —

Wenn man nur eine Transversale und die vier Tangenten in $a, b; a', b'$ betrachtet, so folgt: daß die beiden ersten die beiden letzten in vier auf demselben Kreise liegenden Punkten schneiden (§. 324, 2).

§. 380. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und man zieht von einem Punkte des einen eine Tangente an jeden der beiden andern, verbindet die Berührungspunkte durch eine Gerade, worauf die beiden Kreise zwei Sehnen $ab, a'b'$ abschneiden, und setzt an deren Endpunkte die Buchstaben a, b, a', b' so, daß das Verhältniß $\frac{ab}{a'b'}$ stets dasselbe Zeichen hat, und nimmt endlich die beiden Punkte, welche jedes der beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen; so ist der Ort dieser Punkte ein vierter Kreis, welcher mit den gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat. —

Denn es seien e, f die beiden Punkte, welche die beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen; so hat man nach §. 128:

$$\frac{ea \,.\, eb}{ea' \,.\, eb'} = -\frac{ab}{a'b'}.$$

Nun ist aber das Verhältniß $\frac{ab}{a'b'} = const.$ (§. 379) und behält nach der Voraussetzung dasselbe Zeichen; folglich behält auch das Verhältniß $\frac{ea \,.\, eb}{ea' \,.\, eb'}$ stets denselben Zahlenwerth und dasselbe Zeichen, was beweis't, daß der Punkt e auf einem Kreise liegt,

welcher durch die Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Kreise geht (§. 372). Folglich ꝛc.

§. 381. Umgekehrt: Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und man zieht eine Gerade, welche die beiden ersten in zwei Punktepaaren $a, b; a', b'$ von solcher Beschaffenheit schneidet, daß die beiden Segmente aa', bb' von dem dritten Kreise harmonisch getheilt werden; so treffen die Tangenten an dem ersten Kreise in a und b die an dem zweiten in a' und b' in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen, der durch die Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Kreise geht. —

Denn wenn e, f die Durchschnittspunkte der Transversale mit dem dritten Kreise sind, so ist das Verhältniß $\frac{ea \,.\, eb}{ca' \,.\, cb'}$ nach §. 378 constant, und da die beiden Punkte e, f die beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen; so hat man:

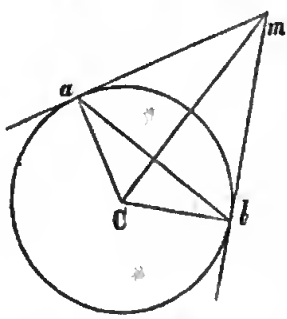
$$\frac{ea \,.\, eb}{ea' \,.\, eb'} = - \frac{ab}{a'b'};$$

folglich:

$$\frac{ab}{a'b'} = const.$$

was nach §. 379 zeigt: daß sich die Tangenten in a und a' auf einem Kreise treffen.

§. 382. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und jeder Punkt m des einen wird zum gemeinschaftlichen Scheitel zweier um die beiden andern Kreise beschriebenen Winkel genommen; so steht das Verhältniß der Sinus dieser Winkel sowohl zu dem Verhältniß der Quadrate der Berührungssehnen in den beiden letzten Kreisen, als zu dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate der Entfernungen des Scheitelpunktes auf dem ersten Kreise von den Mittelpunkten der beiden andern Kreise in einem constanten Verhältniß. —



Denn das Viereck $ambC$ läßt sich in einen Kreis beschreiben; folglich hat man:

$$\sin amb = \frac{ab}{mC}$$

und:

$$ab \,.\, mC = 2am \,.\, Ca = 2R \,.\, am,$$

woraus folgt:

$$\sin amb = \frac{(ab)^2}{2R \,.\, am}, \quad \sin amb = \frac{2R \,.\, am}{(mC)^2}.$$

Ebenso ist in dem andern Kreise:

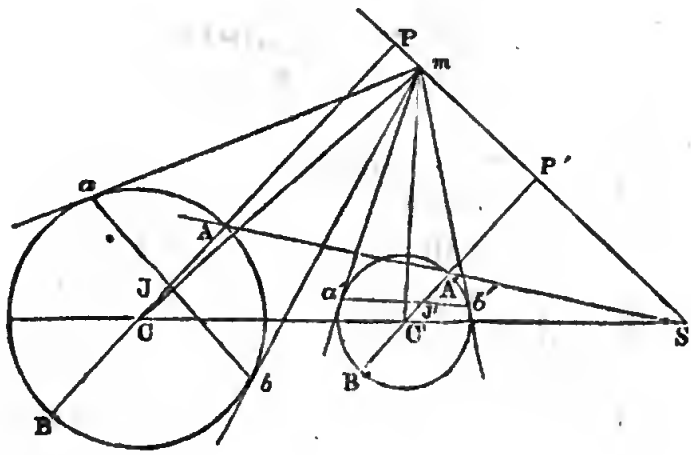
$$\sin a'mb' = \frac{(ab)^2}{2R' \,.\, a'm'}, \quad \sin a'mb' = \frac{2R' \,.\, a'm}{(mC')^2};$$

also:

$$\frac{\sin amb}{\sin a'mb'} = \frac{R'}{R} \cdot \frac{a'm}{am} \cdot \frac{(ab)^2}{(a'b')^2} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{am}{a'm} \cdot \frac{(mC')^2}{(mC)^2}.$$

Nach §. 373 ist aber $\frac{am}{a'm} = const.$ Folglich ꝛc.

§. 383. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalare haben, und jeder Punkt m des einen wird zum gemeinschaftlichen Scheitel zweier um die beiden andern Kreise beschriebenen Winkel genommen; so stehen die Segmente, welche diese Winkel auf einer zu den von ihrem Scheitel nach



dem Aehnlichkeitsmittelpunkte der beiden Kreise gezogenen Geraden parallelen Transversale abschneiden, in einem constanten Verhältniß. —

Denn nach §. 382 hat man:

$$\frac{\sin amb}{\sin a'mb'} = \frac{R \,.\, am}{R' \,.\, a'm} : \frac{(Cm)^2}{(C'm)^2},$$

und nach §. 323 ist:

$$\sin amS \,.\, \sin bmS = \frac{JA \,.\, JB}{R^2} \,.\, \frac{(CP)^2}{(Cm)^2},$$

$$\sin a'mS \,.\, \sin b'mS = \frac{J'A' \,.\, J'B'}{R'^2} \,.\, \frac{(C'P')^2}{(C'm)^2};$$

folglich:

$$\frac{\sin amb}{\sin a'mb'} : \frac{\sin amS \,.\, \sin bmS}{\sin a'mS \,.\, \sin b'mS}$$

$$= \frac{R \,.\, am}{R' \,.\, a'm} : \left[\left(\frac{JA \,.\, JB}{R^2} : \frac{J'A' \,.\, J'B'}{R'^2}\right) \,.\, \frac{(CP)^2}{(C'P')^2}\right].$$

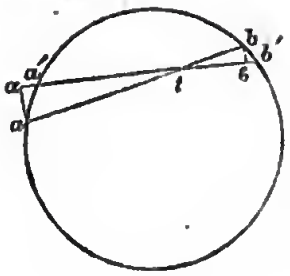
Nun liegen aber die Punkte J, J', als Pole der Geraden Sm, mit dem Aehnlichkeitsmittelpunkte S in gerader Linie, und man hat:

$$\frac{JA \,.\, JB}{R^2} = \frac{J'A' \,.\, J'B'}{R'^2}, \quad \frac{(CP)^2}{(C'P')^2} = \frac{R^2}{R'^2};$$

folglich:

$$\frac{\sin amb}{\sin a'mb'} : \frac{\sin amS \,.\, \sin bmS}{\sin a'mS \,.\, \sin b'mS'} = \frac{am}{a'm} : \frac{R}{R'}.$$

Zieht man endlich eine zu mS parallele Transversale, so ist nach §. 285 das Verhältniß der auf dieser Geraden von den beiden Winkeln bestimmten Segmente dem ersten Theile der letzten Gleichung gleich — und der zweite Theil ist nach §. 373 constant; folglich ꝛc.



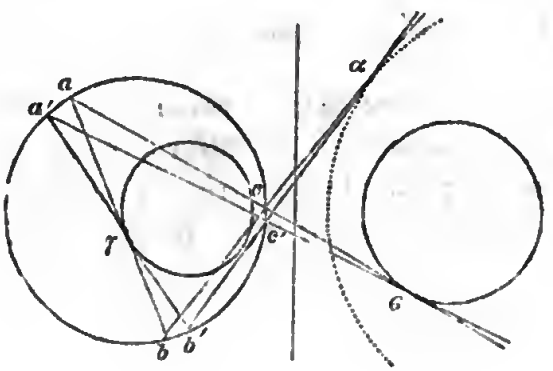
§. 384. Wenn zwei Sehnen $ab, a'b'$ eines Kreises einen **unendlich kleinen** Winkel i mit einander bilden, so verhalten sich die beiden Segmente, in welche sie der Durchschnittspunkt i theilt, wie die zwischen den Sehnen liegenden Kreisbogen; d. h. es ist:

$$\frac{ia}{ib} = \frac{aa'}{bb'}.$$

Denn beschreibt man aus dem Punkte i als Mittelpunkt mit den Halbmessern ia, ib die Kreisbogen $a\,\alpha$, $b\,\mathfrak{b}$, so hat man $\frac{ia}{ib} = \frac{a\alpha}{b\mathfrak{b}}$. Aber die beiden Dreiecke $a\alpha a'$, $b\mathfrak{b}b'$, welche als geradlinige betrachtet werden können, weil die Seiten $a\,a$, $b\,b$ unendlich klein sind, sind einander ähnlich, weil sie in α, $\mathfrak{b}$ rechtwinklig, und die Winkel bei a und b' einander gleich sind. Es ist also $\frac{a\alpha}{b\mathfrak{b}} = \frac{aa'}{bb'}$; folglich: $\frac{ia}{ib} = \frac{aa'}{bb'}$; w. z. b. w.

§. 385. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und die Spitze eines veränderlichen Winkels sich auf dem ersten Kreise fortbewegt, während seine Schenkel resp. stets die beiden andern Kreise berühren; so umhüllt die in dem ersten Kreise von den Schenkeln des Winkels bestimmte Sehne einen vierten Kreis, d. h. sie rollt auf denselben fort, und dieser Kreis hat mit den drei ersten dieselbe Radikalaxe. —

Wir wollen den Winkel in einer seiner Lagen betrachten. Es



seien a seine Spitze auf dem ersten Kreise, ε, γ resp. die Berührungspunkte seiner Schenkel mit den beiden andern Kreisen und bc die in dem ersten Kreise bestimmte Sehne. Ferner sei $b'a'c'$ eine zweite, der ersten unendlich nahe Lage des Winkels, so treffen sich die Schenkel $ac, a'c'$ in dem Berührungspunkte ε und die Schenkel $ab, a'b'$ in dem Berührungspunkte γ, und der Durchschnittspunkt α der beiden Sehnen $ab, a'b'$ ist der Punkt, worin die Sehne bc die Umhüllungslinie, d. h. die krumme Linie, auf welcher sie fortrollt, berührt. — Nach dem vorhergehenden Satze ist aber:

$$\frac{a\varepsilon}{c\varepsilon} = \frac{aa'}{cc'},$$

und wenn $(a, X), (b, X), (c, X)$ die Abstände der drei Punkte a, b, c von der Radikalaxe der drei Kreise bezeichnen; so hat man:

$$\frac{a\varepsilon}{c\varepsilon} = \sqrt{\frac{(a,X)}{(c,X)}}; \quad (\S.\ 360)$$

folglich:

$$\frac{aa'}{cc'} = \sqrt{\frac{(a,X)}{(c,X)}} \text{ und ebenso: } \frac{aa'}{bb'} = \sqrt{\frac{(a,X)}{(b,X)}};$$

also:

$$\frac{bb'}{cc'} = \sqrt{\frac{(b,X)}{(c,X)}};$$

aber: $$\frac{bb'}{cc'} = \frac{b\alpha}{c\alpha}, \text{ mithin: } \frac{b\alpha}{c\alpha} = \sqrt{\frac{(b,X)}{(c,X)}},$$

woraus folgt: daß α der Berührungspunkt der Sehne bc und eines Kreises ist, der mit den gegebenen dieselbe Radikalaxe hat. Dieser Kreis berührt folglich die Umhüllungslinie der Sehne bc, und für einen α unendlich nahen Punkt dieser Linie hätte man auch einen Berührungskreis. Beide Berührungskreise hätten also einen gemeinschaftlichen Punkt, und müßten folglich zusammenfallen, weil sie schon auf der Radikalaxe zwei gemeinschaftliche Punkte haben. — Die Umhüllungslinie der Sehne bc ist folglich ein Kreis, welcher durch die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der drei gegebenen Kreise geht. —

§. 386. Der vorhergehende Lehrsatz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Wenn mehrere Kreise dieselbe Radikalare haben, und in den einen ein Vieleck beschrieben ist, dessen Seiten, außer einer, die übrigen Kreise berühren, und man läßt die Spitzen dieses Vieleckes auf dem ersten Kreise, so wie seine Seiten an den andern Kreisen fortrücken; so umhüllt die letzte Seite einen Kreis, welcher mit den gegebenen dieselbe Radikalare hat. —

Denn es ist leicht einzusehen, daß der Lehrsatz, nachdem er für ein Dreieck bewiesen ist, auch für ein Viereck, Fünfeck, ꝛc. gilt. —

Hieraus folgt: Wenn die Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Vieleckes ebensoviele andere Kreise berühren, welche mit dem ersten dieselbe Radikalare haben; so kann man in denselben Kreis unendlich viele andere Vielecke von derselben Seitenzahl beschreiben, deren Seiten resp. die übrigen Kreise berühren. —

Diese beiden schönen Lehrsätze rühren von Poncelet her.

§. 387. Wenn zwei Kreise sich nicht schneiden, so gibt es auf der Mittelpunktslinie zwei Punkte *e, f*, von welchen jeder in Bezug auf die beiden Kreise dieselbe Polare hat, und die Polare des einen geht durch den andern. Diese beiden Punkte theilen die auf der Mittelpunktslinie liegenden beiden Durchmesser harmonisch, und sind imaginär, wenn sich die beiden Kreise schneiden, weil alsdann die beiden Durchmesser in einander greifen (§. 130).

Der in einer auf der Mittelpunktslinie senkrechten Richtung unendlich entfernte Punkt besitzt ebenfalls die Eigenschaft: daß er in beiden Kreisen dieselbe Polare hat, welche die Mittelpunktslinie ist; allein wir werden hier nur die beiden ersten Punkte *e, f* betrachten. —

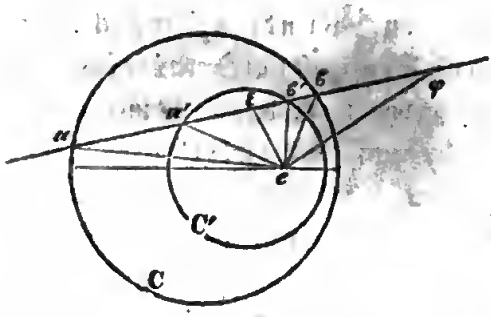
Wenn man diese beiden Punkte als Kreise von einem unendlich kleinen Halbmesser betrachtet, so hat jeder mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalare, welche durch ihre Mitte geht (§. 368).

§. 388. Wenn man auf einer beliebigen Transversale zwei Punkte nimmt, welche in Bezug auf zwei Kreise

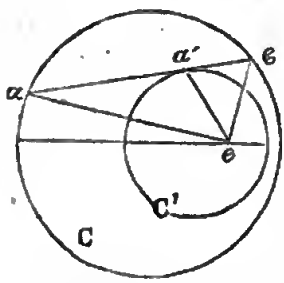
conjugirt sind; so erscheinen diese Punkte von jedem der beiden Punkte e, f aus unter einem rechten Winkel. —

Denn die Transversale schneidet die beiden Kreise und den als unendlich kleinen Kreis betrachteten Punkt e in sechs Involutionspunkten (§. 371), deren Doppelpunkte die in Bezug auf die beiden Kreise conjugirten Punkte sind (§. 127); folglich sind sie harmonisch conjugirt in Bezug auf die beiden Durchschnittspunkte des unendlich kleinen Kreises e, und erscheinen mithin vom Punkte e aus unter einem rechten Winkel (§. 370).

§. 389. Wenn zwei Kreise C, C' von einer Transversale geschnitten werden, so erscheinen die Sehnen, welche sie auf derselben abschneiden, von jedem der beiden Punkte e, f aus unter Winkeln, welche dieselbe Halbirungslinie haben, oder deren Halbirungslinien auf einander senkrecht sind. —

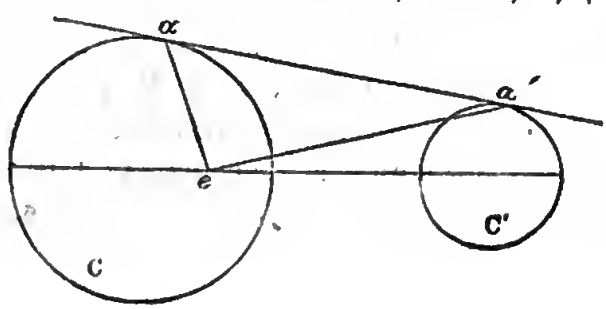


Denn es seien ε, φ die beiden Punkte, welche die beiden Sehnen $\alpha\varepsilon, \alpha'\varepsilon'$ harmonisch theilen; so sind die beiden Geraden $e\varepsilon, e\varphi$ aufeinander senkrecht (§ 388), sind also die Halbirenden der Winkel $\alpha e\varepsilon, \alpha' e\varepsilon'$ und deren Supplemente (§. 52). — Folglich ꝛc.



Wenn die Transversale den Kreis C' berührt, so ist die von dem Punkte e nach dem Berührungspunkte α' gezogene Gerade die Halbirende des Winkels $\alpha e\varepsilon$, oder seines Supplementes. —

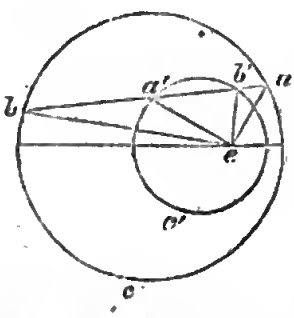
Wenn die Transversale beide Kreise berührt, so werden die



beiden Winkel $ae\mathfrak{E}, a'e\mathfrak{E}'$ unendlich klein, und die Halbirenden sind die nach den Berührungspunkten a, a' gehenden Geraden ea, ea', so daß man den Satz hat:

Wenn man an zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zieht, so erscheinen die Berührungspunkte von jedem der Punkte e, f aus unter einem rechten Winkel. —

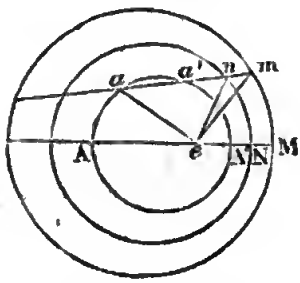
Um diesen Satz direkt zu beweisen, braucht man nur zu bemerken: daß die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangente der beiden Kreise in Bezug auf die beiden Durchschnittspunkte des unendlich kleinen Kreises e mit dieser Tangente harmonisch conjugirt sind (§. 371), und mithin erscheinen die beiden Berührungspunkte von e aus unter einem rechten Winkel (§. 370).



§. 390. Wenn die beiden Kreise C, C' sich nicht schneiden, und man läßt um den Punkt e, welcher in Bezug auf diese Kreise dieselbe Polare hat, einen rechten Winkel sich drehen, dessen Schenkel die Kreise resp. in a, a' schneiden; so bestimmt die Gerade aa' zwei andere Durchschnittspunkte b, b' von solcher Beschaffenheit: 1) daß der Winkel beb' ein rechter ist; 2) daß sich die Tangenten in a, a' oder b, b' auf einem dritten Kreise schneiden, welcher durch die Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Kreise geht, und 3) daß die beiden Sehnen $ab, a'b'$ in einem constanten Verhältniß stehen. —

Denn betrachtet man den Punkt e als einen unendlich kleinen Kreis, der mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat, und sind ε, φ die imaginären Durchschnittspunkte desselben mit der Geraden aa'; so sind die sechs Punkte a, b; a', b'; ε, φ in Involution (§. 371). Nun sind aber a, a' in Bezug auf den unendlich kleinen Kreis conjugirt (§. 370), also auch in Beziehung auf die beiden Punkte ε, φ (§. 324); folglich sind b, b' auch in Bezug auf ε, φ harmonisch conjugirt (§. 170), mithin auch conjugirt in Bezug auf der unendlich kleinen Kreis, und folglich ist der Winkel beb' ein rechter. —

Da ferner die beiden Punkte ε, φ, welche die beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen, auf dem Kreise e liegen, welcher mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat; so folgt nach §. 351: daß sich die Tangenten in a und a' auf einem Kreise schneiden, welcher mit den beiden gegebenen dieselbe Radikalaxe hat, und daß folglich die beiden Sehnen $ab, a'b'$ in einem constanten Verhältniß stehen (§. 379). W. b. w. s.



§. 391. Wenn drei Kreise dieselbe Radikalaxe haben, und man zieht eine beliebige Transversale, welche den ersten Kreis in den beiden Punkten a, a' und die beiden andern resp. in den Punkten m, n schneidet; so hat man die Relation:

$$\frac{\sin mea \,.\, \sin mea'}{\sin nea \,.\, \sin nea'} = const. = \frac{MA \,.\, MA'}{NA \,.\, NA'} \cdot \frac{(Me)^2}{(Ne)^2}.$$

Denn es ist (§. 372):

$$\frac{ma \,.\, ma'}{(me)^2} = \frac{MA \,.\, MA'}{(Me)^2} \text{ oder: } \frac{\sin mea \,.\, \sin mea'}{\sin a \,.\, \sin a'} = \frac{MA \,.\, MA'}{(Me)^2},$$

und ebenso:

$$\frac{na \,.\, na'}{(ne)^2} = \frac{NA \,.\, NA'}{(Ne)^2} \text{ oder: } \frac{\sin nea \,.\, \sin nea'}{\sin a \,.\, \sin a'} = \frac{NA \,.\, NA'}{(Ne)^2}.$$

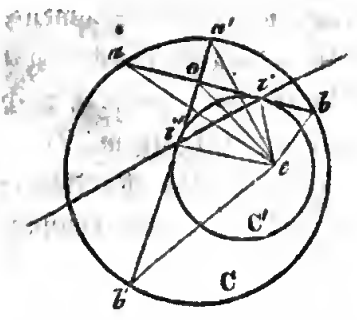
Folglich ꝛc.

Wenn die Transversale den ersten Kreis in einem Punkte i berührt, so hat man:

$$\frac{\sin iem}{\sin ien} = \sqrt{\frac{MA \,.\, MA}{NA \,.\, NA'}} : \frac{Mc}{Ne} = const.$$

Wenn α, μ, ν die Mittelpunkte der drei Kreise bezeichnen, so hat man für das anharmonische Verhältniß der vier Punkte α, μ, ν, e:

$$\frac{MA \,.\, MA'}{NA \,.\, NA'} : \frac{(Me)^2}{(Ne)^2} = \frac{\mu\alpha}{\nu\alpha} : \frac{\mu e}{\nu e}. \quad (§. 372).$$



§. 392. Wenn zwei Kreise C, C' sich nicht schneiden, und zwei Tangenten an C', den andern C in den vier Punkten a, b; a', b' treffen; so sind die Abstände dieser Punkte von dem Punkte e, welcher in beiden Kreisen dieselbe Polare hat, den Abständen derselben Punkte von der Berührungssehne der beiden Tangenten des Kreises C' proportional. —

Denn denkt man sich einen dritten Kreis, welcher mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Radikalaxe hat, und durch den Durchschnittspunkt o der beiden Sehnen $ab, a'b'$ des Kreises C geht, die den Kreis C' in i, i' berühren; so hat man nach dem vorhergehenden Satze:

$$(\mu) \qquad \frac{\sin aei}{\sin oei} = \frac{\sin a'ei'}{\sin oei'},$$

und die beiden Dreiecke aei, oei geben:

$$\frac{\sin aei}{\sin oei} = \frac{ai}{oi} : \frac{ea}{eo}.$$

Aber das Verhältniß $\frac{ai}{oi}$ ist dem Verhältnisse der von den Punkten a, o auf jede durch den Punkt i gehende Gerade, also auch auf die Gerade ii', gefällten Perpendikel gleich. Wenn also $a\alpha$, $o\omega$ diese Perpendikel bedeuten, so ist:

$$\frac{\sin aei}{\sin oei} = \frac{a\alpha}{o\omega} : \frac{ea}{eo} = \frac{a\alpha}{ea} : \frac{o\omega}{eo}.$$

Ebenso hat man, wenn $a'\alpha'$ der Abstand des Punktes a' von der Geraden ii' ist:

$$\frac{\sin a'oi'}{\sin oei'} = \frac{a'\alpha'}{ea'} : \frac{o\omega}{eo},$$

und folglich wegen (μ):

$$\frac{a\alpha}{ea} = \frac{a'\alpha'}{e'a'}.$$

Was für den Punkt a' bewiesen ist, gilt aber auch von b', und was für a in Bezug auf a', b' bewiesen ist, muß auch für b gelten. Mithin sind die vier Verhältnisse $\frac{aa}{ea}$, ... einander gleich. —

Drei beliebige Kreise. — Berührung derselben.

§. 393. Drei Kreise von einer beliebigen Lage geben, zu je zwei betrachtet, sechs Aehnlichkeitsmittelpunkte, welche zu je drei auf vier Geraden liegen, und zwar so, daß auf einer dieser Geraden die drei Mittelpunkte der direkten Aehnlichkeit, und auf jeder der übrigen zwei Mittelpunkte der inversen und ein Mittelpunkt der direkten Aehnlichkeit liegen. —

Denn betrachtet man in den drei Kreisen, deren Mittelpunkte O, O', O'' seien, drei parallele Halbmesser $Oa, O'a', O''a''$; so bestimmt die Gerade aa' auf OO' einen Aehnlichkeitsmittelpunkt der beiden Kreise O, O', und Aehnliches gilt von den beiden andern Geraden $a'a'', a''a$. Da nun die Spitzen der beiden Dreiecke $OO'O', aa'a''$ paarweise auf drei Parallelen liegen, so liegen die Durchschnittspunkte von je zwei ihrer Seiten in gerader Linie (§. 211), d. h. die durch die drei Geraden $aa', a'a'', a''a$ bestimmten Aehnlichkeitsmittelpunkte liegen in gerader Linie. Aber wenn die drei Halbmesser dieselbe Richtung haben, so geht jede der drei Geraden durch einen Mittelpunkt der direkten Aehnlichkeit (§. 344), und wenn einer der drei Halbmesser eine entgegengesetzte Richtung von der der beiden andern hat; so gibt derselbe zwei Mittelpunkte der inversen und die beiden andern geben einen Mittelpunkt der direkten Aehnlichkeit. Folglich ꝛc.

§. 394. Die Radikalaren von drei zu je zwei betrachteten Kreisen O, O', O'' gehen durch denselben Punkt. —

Denn es sei ω der Durchschnittspunkt der Radikalaren von O, O' und von O, O'', und eine durch diesen Punkt gezogene Gerade schneide die drei Kreise in den sechs Punkten a, a'; b, b'; c, c'; so hat man nach §. 348 die beiden Gleichheiten:

$$\omega a . \omega a' = \omega b . \omega b', \quad \omega a . \omega a' = \omega c . \omega c';$$

folglich:

$$\omega b \,.\, \omega b' = \omega c \,.\, \omega c',$$

woraus erhellet: daß der Punkt ω auf der Radikalaxe der beiden Kreise O und O'' liegt. Folglich ꝛc.

Der Punkt ω heißt das Radikalcentrum — und man sieht leicht ein, wie mittelst desselben die Radikalaxe zweier sich nicht treffender Kreise construirt werden kann, wenn man sie mit irgend einem dritten Kreise durchschneidet. —

§. 395. Wenn drei Kreise gegeben sind, und man legt durch denselben Punkt drei andere Kreise, welche resp. durch die Durchschnittspunkte von je zwei der ersten gehen; so schneiden sich diese drei Kreise in demselben zweiten Punkte. —

Es seien U, C, C' die drei gegebenen Kreise, und durch einen Punkt P seien drei andere Kreise A, A', Σ so gelegt: daß der erste A durch die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte von U und C, der zweite A' durch die von U und C', und der dritte Σ durch die von C und C' geht; so ist zu beweisen: daß sich diese drei Kreise A, A', Σ in demselben zweiten Punkte schneiden. —

Es sei P' der zweite Durchschnittspunkt von A und A', so bildet das Segment PP' mit den Segmenten, welche die Kreise U, C, so wie mit denen, welche die Kreise U, C' auf PP' bestimmen, eine Involution (§. 371). Folglich bildet PP' auch mit den durch die Kreise C, C' bestimmten Segmenten eine Involution. — Man kann also durch P und P' einen Kreis legen, welcher durch die Durchschnittspunkte von C und C' geht, und dies ist der Kreis Σ. Folglich ꝛc.

§. 396. Man kann den vorhergehenden Lehrsatz auch folgendermaßen ausdrücken, wobei die den drei Kreisen A, A', Σ gemeinschaftlichen Punkte P, P' auch imaginär sein können:

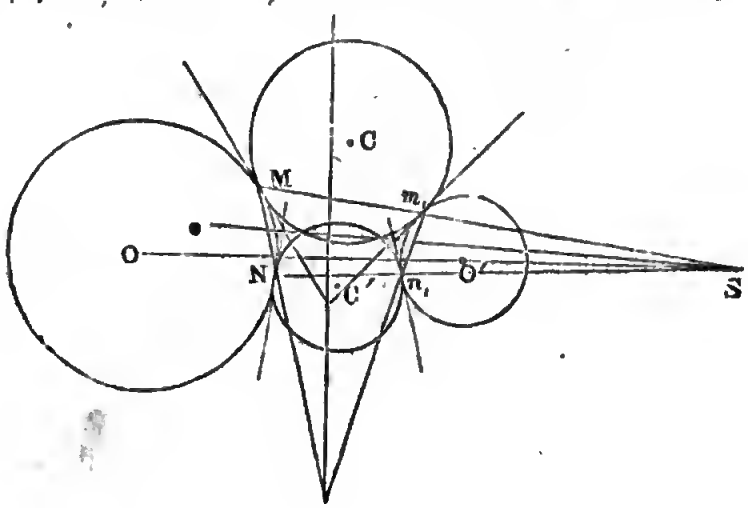
Wenn auf einem Kreise U zwei reelle, oder imaginäre Punktepaare genommen sind, und man legt durch die beiden ersten Punkte zwei beliebige Kreise C, A; so wie durch die beiden andern ebenfalls zwei beliebige Kreise C', A'; so schneiden diese die erstern in vier auf einem Kreise liegenden Punkten. —

Denn es seien P, P' die reellen, oder imaginären Durchschnittspunkte der beiden Kreise A, A', so bildet das Segment PP' sowohl mit den Segmenten, welche die Kreise U, C, als mit denen, welche die Kreise U, C' auf derselben Geraden bestimmen, eine Involution (§. 371). Folglich bildet auch das Segment PP' mit den beiden Segmenten, welche die Kreise C, C' auf derselben Geraden bestimmen, eine Involution, und man kann mithin durch die beiden Punkte P, P' einen Kreis legen, welcher durch die Durchschnittspunkte der beiden Kreise C, C' geht. W. z. b. w.

§. 397. Wenn ein Kreis zwei andere berührt, so liegen die Berührungspunkte mit einem der Aehnlichkeitsmittelpunkte der letztern in gerader Linie, und die Tangenten in diesen Punkten schneiden sich auf der Radikalare dieser beiden Kreise. —

Der erste Theil dieses Satzes folgt aus §. 393, weil der Berührungspunkt zweier Kreise einer ihrer Aehnlichkeitsmittelpunkte ist (§. 344), und der zweite Theil folgt aus §. 394, weil die gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise ihre Radikalare ist. —

§. 398. Wenn zwei Kreise O, O' gegeben sind, und man beschreibt zwei andere C, C' welche jene resp. in M, m_1 und N, n_1 berühren, so daß die Geraden Mm_1, Nn_1 durch denselben Aehnlichkeitsmittelpunkt S der beiden Kreise O, O' gehen; so geht 1) die Radikalare der beiden Kreise C, C' durch diesen Punkt S, und 2) liegt ein Aehnlichkeitspunkt von C, C' auf der Radikalare von O, O' im Durchmittelschnittspunkte der beiden Sehnen $MN, m_1 n_1$.



1) Denn nach §. 356 hat man:

$$SM.Sm_1 = SN.Sn_1;$$

folglich liegt der Punkt S auf der Radikalare der beiden Kreise C,C' (§. 348). 2) Die beiden Geraden MN, m_1n_1 schneiden sich auf der Radikalare der beiden Kreise O,O' (§. 355), und jede derselben geht durch einen der Aehnlichkeitsmittelpunkte der beiden Kreise C, C' (§. 397), so daß nur zu beweisen ist: daß es derselbe Aehnlichkeitsmittelpunkt ist. — Wir wollen annehmen, daß S ein direkter Aehnlichkeitsmittelpunkt sei, so sind die beiden Punkte M, m_1 nothwendig zwei gleichnamige (direkte, oder inverse) Aehnlichkeitsmittelpunkte des Kreises C mit jedem der Kreise O, O' (§. 393), und ebenso die beiden Punkte N, n_1. Jede der beiden Geraden MN, m_1n_1 verbindet also zwei Aehnlichkeitsmittelpunkte von solcher Beschaffenheit: daß, wenn die beiden ersten gleich- oder verschiedennamig sind, dies auch mit den beiden andern der Fall ist. In beiden Fällen gehen also die beiden Geraden durch denselben Aehnlichkeitsmittelpunkt der beiden Kreise C, C' (§. 393). Der Beweis ist derselbe, wenn S ein inverser Aehnlichkeitsmittelpunkt ist. —

Der Pol der Radikalare der beiden Kreise C, C' in Bezug auf den Kreis O liegt auf der Geraden MN. Denn diese Are geht nach §. 397 durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten in M, N, welches der Pol dieser Geraden ist. Hieraus folgt umgekehrt: daß die Sehne MN durch den Pol der Radikalare der beiden Kreise C, C' in Bezug auf den Kreis O geht, oder mit andern Worten: daß der Pol dieser Are auf der Geraden MN liegt (§. 313).

§. 399. Eine durch den Aehnlichkeitsmittelpunkt zweier Kreise O,O' gezogene Gerade L ist die Radikalare unendlich vieler Paare von Kreisen C, C', welche die beiden Kreise O, O' berühren. —

Denn um ein solches Kreispaar C, C' zu bestimmen, braucht man nur durch den Pol der Geraden L in Bezug auf den Kreis O eine Gerade zu ziehen, welche diesen Kreis in zwei Punkten M, N schneidet; so haben die Kreise C, C', resp. welche durch M, N gehen und die Kreise O, O' berühren, die Gerade L zur Radikalare (§. 398). —

§. 400. Der Aehnlichkeitsmittelpunkt der beiden Kreise C, C' liegt auf der Radikalare der beiden Kreise O, O' in ihrem Durch-

schnittspunkte mit der Sehne MN (§. 398). Dieser Punkt kann also beliebig angenommen werden, d. h.:

Wenn durch den Aehnlichkeitsmittelpunkt zweier Kreise O, O' eine Gerade L gezogen und auf der Radikalaxe ein Punkt angenommen wird, so kann man zwei Kreise C, C' bestimmen, welche die Kreise O, O' berühren, die Gerade L zur Radikalaxe und den Punkt zum Aehnlichkeitsmittelpunkte haben. —

Denn man braucht durch diesen Punkt nur eine Gerade zu ziehen, welche durch den Pol der Geraden L in Bezug auf einen der Kreise O, O' geht; so bestimmt dieselbe auf diesem Kreise die beiden Berührungspunkte der Kreise, welche den beiden Bedingungen genügen. —

§. 401. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt. —

Aufl. Es seien O, O', O'' die drei gegebenen Kreise und S, S', S'' ihre direkten Aehnlichkeitsmittelpunkte, so kann man zwei Kreise beschreiben, welche einen der drei gegebenen Kreise O, O', O'' berühren, die Gerade $SS'S''$ zur Radikalaxe und den Durchschnittspunkt der drei Radikalaxen von O, O', O'' zum Aehnlichkeitsmittelpunkte haben, und nach dem vorhergehenden Lehrsatze berühren diese beiden Kreise auch jeden der beiden andern der drei gegebenen Kreise. —

Um diese beiden Kreise zu bestimmen, sucht man die Pole der Geraden $SS'S''$ in Bezug auf die Kreise O, O', O'' und zieht durch diese Punkte und dem Durchschnittspunkt der Radikalaxen von O, O', O'' drei Gerade; so schneiden dieselben die drei Kreise in den gesuchten Berührungspunkten der beiden Kreise, welche der Aufgabe genügen. —

Für jede der drei andern Geraden, auf welcher je drei der sechs Aehnlichkeitsmittelpunkte der drei gegebenen Kreise liegen, erhält man zwei andere solcher Berührungskreise, so daß es im Allgemeinen acht Kreise gibt, welche die drei gegebenen Kreise berühren. —

Diese von Gergonne herrührende Auflösung einer zu allen Zeiten und auf sehr viele verschiedene Arten gelöst'en Aufgabe ist die einfachste, und umfaßt alle besondern Fälle, welche man er-

hält, wenn die gegebenen Kreise in Punkte, oder gerade Linien übergehehen. —

Wenn sich ein Kreis auf einen Punkt reducirt, so ist er selbst sein Aehnlichkeitsmittelpunkt mit einem andern Kreise, und die Radikalaxe ist von diesem Punkte und seiner Polare in Bezug auf den Kreis gleichweit entfernt (§. 368). —

Wenn ein Kreis in eine gerade Linie übergeht, weil sein Halbmesser unendlich groß geworden ist; so ist diese Gerade seine Radikalaxe mit einem andern Kreise. Die Punkte, welche als die Aehnlichkeitsmittelpunkte dieser Geraden und eines Kreises betrachtet werden, sind die Endpunkte des auf dieser Geraden senkrechten Durchmessers. Denn diese Punkte behalten die charakteristische Eigenschaft der Aehnlichkeitsmittelpunkte, nämlich: daß das Produkt oder Rechteck der Abstände eines Aehnlichkeitsmittelpunktes von zwei homologischen, oder antihomologischen Punkten constant ist (§. 356 und §. 357). In der That hat man (§. 309):

$$SM.Sm_1 = const.$$

Hiernach wird man die allgemeine Auflösung leicht auf die folgenden 5 Aufgaben anwenden:

1) Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise berührt. —

Die Aufgabe gestattet vier Auflösungen, weil es zwei Gerade gibt, wovon jede als drei Aehnlichkeitsmittelpunkte enthaltend betrachtet werden kann.

2) Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise und eine gegebene Gerade berührt. —

Man hat acht Auflösungen, weil man sechs Aehnlichkeitsmittelpunkte hat, welche zu je drei auf vier Geraden liegen, wovon jede zwei Auflösungen gibt.

3) Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt. —

Man hat nur zwei Auflösungen, weil man nur eine Gerade hat, welche als drei Aehnlichkeitsmittelpunkte enthaltend betrachtet werden kann, nämlich die Gerade, welche die beiden gegebenen Punkte verbindet. —

4) Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Gerade berührt. —

Man hat acht Auflösungen, die paarweise den vier Geraden entsprechen, welche die Aehnlichkeitsmittelpunkte in Bezug auf den Kreis und eine der gegebenen Geraden mit den Aehnlichkeitsmittelpunkten in Bezug auf die andere Gerade verbinden. —

5) Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt.

Es gibt vier Auflösungen, die paarweise den beiden Geraden entsprechen, welche von dem gegebenen Punkte nach den beiden Aehnlichkeitsmittelpunkten in Bezug auf den Kreis und die Gerade gezogen sind. —

Druckfehler.

Seite 1 Zeile 9 von oben lies mehrere statt mehrerer. — S. 8 Z. 6 von unten l. Büschel st. Büschels. — S. 12 Z. 13 v. o. l. resp. mit st. resp. — S. 32 Z. 7 v. o. l. $\frac{ma}{mf}\cdot\frac{ea'}{ea}$ st. $\frac{ma}{mf}\cdot\frac{ca'}{ca}$ — S. 33 Z. 7 v. u. l. $\frac{ef}{ea}$ st. $\frac{ef}{na}$ — S. 39 Z. 17 v. u. l. $2Mux$ st. $2Mu$ — S. 45 Z. 7 v. o. l. ef st. cf. — S. 53. Z. 16 v. u. l. homologen st. honologen — S. 74 Z. 6. v. u. l. $r-r''$ st. $r-r'$ — S. 82 Z. 5 v. u. l. (.) st. (:) — S. 84 Z. 4 v. u. l. — $aJ.am'$ st. — am' — S. 90. Z. 17 v. u. l. $2aO$ st. $2aJ$ — S. 101 Z. 8 v. u. l. ab st. aa' — S. 105 Z. 8 v. u. l. zeigt st. znigt — S. 106 Z. 13 v. u. l. Punkt e st. Punkte — S. 107 Z. 3 v. u. l. ab' st. bb' u. Z. 10 v. u. l. $ea'.eb'$ st. $ea'.ea'$ — S. 113 Z. 10 v. u. l. eb' st. cb' — S. 139 Z. 19 v. o. l. gezogenen st. gezogen — S. 143 Z. 11 v. o. l. cc' st. $c'c$ — S. 148 Z. 1 v. u. l. $Qc.Qc'$ st. $Qc.Oc'$ — S. 150 Z. 1 v. u. l. $c'a.ca_1$ st. $c'a.ca_1$ — S. 151 Z. 3 v. o. l. $c\mathfrak{S}$ st. cb — S. 171 Z. 15 v. o. l. einer st. einen.

SBN 607362

In der Verlagshandlung dieses Werks sind auch folgende mathematische Werke erschienen:

Die Theorie und Auflösung
der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen,
theoretisch und practisch bearbeitet von

Dr. C. H. Schnuse.

1850. 8. 30 Bogen. broch. 2 Thlr. 24 Sgr.

Die Grundlehren der höhern Analysis.
Zum Gebrauch für angehende Mathematiker und Techniker, so wie als Leitfaden bei öffentlichen Vorträgen an höhern Lehranstalten, einfach und leichtfasslich entwickelt

von Dr. C. H. Schnuse.

Erster Theil: **Differenzialrechnung.**

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

1849. gr. 8. 16½ Bogen. Velinpapier. broch. 1¾ Thlr.

Der zweite Theil dieses Werks: „Die Integralrechnung" befindet sich unter der Presse und wird im Laufe des Sommers 1856 erscheinen.

Ueber das Verhältniß
der
Arithmetik zur Geometrie,
insbesondere
über die geometrische Bedeutung
der
imaginären Zahlen
von
H. Scheffler.

Mit 80 in den Text gedruckten Holzschnitten.

gr. 8. Velinpapier. 27½ Bogen. Preis 2½ Thaler.

Die mechanischen Principien
der Ingenieurkunst und Architektur.
von **Heinrich Moseley,**

Professor der Physik und Astronomie an der Universität zu London.

Nach dem Englischen bearbeitet und mit Erläuterungen und Zusätzen versehen von

H. Scheffler.

Mit 500 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Zwei Theile. gr. 8. 62 Bogen. Velinpapier. broch. 4½ Thlr.

Die Prinzipien
der Hydrostatik und Hydraulik.
Von H. Scheffler,

Mit über 200 in den Text gedruckten Holzschnitten.

2 Bde. 1848. gr. 8. 50 Bogen. Velinpapier. broch. 4 Thlr.

Dieses Werk schließt sich dem vorhergehenden sowohl in der äußern Form wie dem Inhalte nach genau an und beide ergänzen einander.

Digitized by Google

Die Grundlehren
der
Wahrscheinlichkeitsrechnung
von
A. A. Cournot.
Deutsch herausgegeben
von Dr. **C. H. Schnuse.**
Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.
16 Bogen. gr. 8. 1849. Velinpapier. 1¾ Thlr.

Spehr, Prof. F. W.
vollständige Darstellung
der reinen Combinationslehre,
mit Anwendung auf Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Zweite Ausgabe. 1840. 4. 1 Thlr.

Biwaldi, P. P. A.,
petite traité d'arithmetique
par demandes et reponses. 8. *broch.* ¼ *Thlr.*

Erster arithmetischer Cursus
für untere Gymnasialklassen und für andere gelehrte Schulen.
Von
Dr. J. J. G. Hartmann.
1835. gr. 8. Preis ⅔ Thlr.

Fassliche Darstellung der Lehren von der Buchstabenrechnung, der Logarithmen, Progressionen und der Gleichungen des ersten und zweiten Grades
von
G. Molter.
1828. (12 Bogen.) ⅓ Thlr.

Grundlehren
der
Arithmetik und Algebra,
für den höhern Schulunterricht bearbeitet
von
August Uhde.
Dr. phil., Professor der Mathematik und Astronomie am Herzoglichen Collegio Carolino zu Braunschweig und Vorsteher der technischen Abtheilung desselben.
2te unveränderte Ausgabe. 1850. (28 Bogen.) br. 1½ Thlr.

Im Verlage der Hofbuchhandlung von **Eduard Leibrock** in Braunschweig ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Tom. Babington Macaulay's
Geschichte von England.

Uebersetzt

von

Ludwig Lemcke.

gr. 8. Velinpapier. Drei Bände à 25 Bogen, br. Preis à 1 Thlr.

Mit dem Portrait des Verfassers in Stahlstich.

Macaulay's berühmtes Werk ist — wie ein Kritiker in der Augsburg. Allgem. Zeitung sagt — ein Juwel der historischen Literatur aller Zeiten und Völker. — Diese Auffassung des Staats- und Völkerlebens, wiedergegeben in schlichtester Darstellungsweise, seltene Gelehrsamkeit verbunden mit der Erhabenheit über kleinliche Details und dem scharfen Blick für das Große und Wesentliche sind die besondern Vorzüge, welche es dem gebildeten Leser jeden Standes und jeder Beschäftigung empfehlen. Es einzubürgern in Deutschland in den weitesten Kreisen, ist der Zweck dieser neuen Uebersetzung, deren innere Gediegenheit bei allen Sachkennern die bereitwilligste Anerkennung gefunden hat. Sie schmiegt sich in strengster Treue dem Geiste und Wortlaute des Originals an, möglichst alle Schönheiten desselben dem deutschen Leser wiedergebend, während andere sogenannte freie Bearbeitungen durch willkürliche Verstümmlungen, Aenderungen und Auslassungen sich an dem classischen Werke wahrhaft versündigt haben. Außer den Anmerkungen des Originals liefert die Uebersetzung auch viele dem deutschen Leser willkommene Erklärungen einzelner Stellen, namentlich solcher, welche sich auf die Staats- und Rechtsgeschichte England beziehen. — Die von dem Verfasser versprochene Fortsetzung seines Werks wird in der Lemcke'schen Uebersetzung fast gleichzeitig mit dem Originale erscheinen. In der äußern Eintheilung ist ebenfalls die Einrichtung der englischen Original-Ausgabe befolgt, so daß jeder Band der englischen Ausgabe — auch nur einen Band der deutschen bildet, wodurch die vorliegende Ausgabe bei einfach eleganter Ausstattung — zugleich die billigste aller erschienenen ist, indem andere Uebersetzungen willkürlich aus drei Bänden des Originals in der Uebersetzung vier gemacht haben.

Druck der Hofbuchdruckerei von Eduard Krampe in Braunschweig.